المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات ٤

المستوى الرابع

المسار العلمي

النظام الفصلي للتعليم الثانوي

قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٣٩ـ ١٤٤٠هـ
٢٠١٨ـ ٢٠١٩م

ح وزارة التعليم ، ١٤٣٨هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٤ (النظام الفصلي للتعليم الثانوي - المسار العلمي -
كتاب الطالب). / وزارة التعليم.- الرياض ، ١٤٣٨هـ
٢٣٨ ص ؛ ٢١ x ٢٧,٥سم
ردمك : ٤- ٥٩٨- ٥٠٨- ٦٠٣- ٩٧٨

أ- الرياضيات - مناهج - السعودية ٢- التعليم الثانوي - مناهج -
السعودية أ. العنوان
ديوي ٥١٠,٧١٢ ١٤٣٨/٧٥٩٠

رقم الإيداع : ١٤٣٨/٧٥٩٠
ردمك : ٤- ٥٩٨- ٥٠٨- ٦٠٣- ٩٧٨

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، ممَّا يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممَارسة، ممَّا يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلبة، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

الفهرس

الفصل 1 العلاقات والدوالّ النسبية

الفصل 2 المتتابعات والمتسلسلات

الفهرس

الفصل 3 الاحتمالات

الفصل 4 حساب المثلَّثات

إليك عزيزي الطالب

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل مايلي:

- **الدوالّ وخصائصها.**
- **المتباينات وتمثيلها بيانيًا.**
- **المصفوفات والعمليات عليها.**
- **كثيرات الحدود والعمليات عليها.**
- **نظريتا الباقي والعوامل واستعمالهما.**
- **العلاقات والدوالّ العكسية والجذرية.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته من أفكار في **المطويات** .
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلَّها .
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل 1

العلاقات والدوالّ النسبية
Rational Functions and Relations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانيًّا.

والآن:

- أتعرّف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثّل دوالّ نسبية بيانيًّا.
- أحل مسائل التغيّر الطردي والتغيّر المشترك والتغيّر العكسي والتغيّر المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

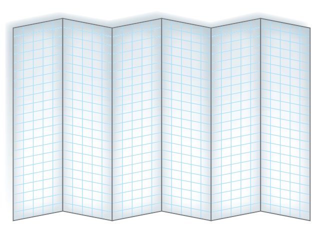
لماذا؟

سفر: يمكن استعمال الدوالّ النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، فيمكنك استعمال العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقق هدفك.

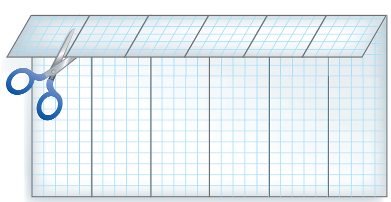
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوالّ النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوالّ النسبية، مبتدئًا بورقة رسم بياني.

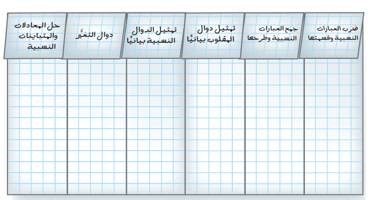
1. **اطو** الورقة عرضيًّا ست طيات متساوية.



2. **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قصّ 6 أشرطة مبتدئًا من الحافة حتى خط الطيّ العرضي.



3. **اكتب** عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.



التهيئة للفصل الأول

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي: انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة. (تستعمل مع الدرس 1-1)

1) $\frac{5}{14} = \frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$

3) $\frac{8}{5} = \frac{1}{4}k$

4) $\frac{10}{9}p = 7$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لترًا من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟

بسّط كلَّ عبارة ممّا يأتي: (تستعمل مع الدرس 1-2)

6) $\frac{3}{4} - \frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{9} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3}$

8) $\frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$

9) $\frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $\frac{3}{4}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟

حُلّ كلَّ تناسب مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 1-4)

11) $\frac{9}{12} = \frac{p}{36}$

12) $\frac{9}{18} = \frac{6}{m}$

13) $\frac{2}{7} = \frac{5}{k}$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس سعرها الأصلي 550 ريالًا، ودفع مبلغ 440 ريالًا بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه سعرها الأصلي 350 ريالًا وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة: $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$، واكتب الحل في أبسط صورة.

$\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$	المعادلة الأصلية
$\frac{72}{11} = 7r$	اضرب كل من الطرفين في العدد 8
$\frac{72}{77} = r$	اقسم كل من الطرفين على العدد 7

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 77 , 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$	العبارة الأصلية
$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$	المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 3, 4, 6 هو العدد 12
$= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$	بسّط
$= \frac{3}{12}$	اجمع، ثم اطرح
$= \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$	بسّط

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$	المعادلة الأصلية
$5(11) = 8u$	بالضرب التبادلي
$55 = 8u$	بسّط
$\frac{55}{8} = u$	اقسم كل من الطرفين على 8

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق:

درست تحليل كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات:

العبارة النسبية
rational expression

الكسر المركّب
complex fraction

لماذا؟

يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالّة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d-33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، و d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية: تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d-33}$ **"عبارة نسبية"**.

بما أن المتغيّرات في الجبر تمثّل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كلٍّ من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} = \frac{(x-3)\overset{1}{\cancel{(x-1)}}}{(x-5)\underset{1}{\cancel{(x-1)}}} = \frac{x-3}{x-5}$$

$\boxed{GCF = x-1}$

$$\frac{8}{12} = \frac{2\cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{3\cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{GCF = 4}$

قراءة الرياضيات

GCF

الرمز (GCF) يمثّل اختصارًا لـ:

Greatest Common Factor

القاسم (العامل) المشترك الأكبر

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}$

$$\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$$ حلّل كلًّا من البسط والمقام إلى عوامل

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)\,(x-3)} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$$ بسّط

تحقق من فهمك

(1A $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

(1B $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

تكون العبارة النسبية غير معرَّفة عند قيم المتغيِّر التي تجعل مقامها صفرًا.

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرَّفة؟

A $-2, -4$ **B** $-2, 7$ **C** $0, -2, -4$ **D** $0, -4, 7$

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2+6x+8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$؛ لذا يمكن حذف البديلين A و B. والآن حلّل المقام إلى عوامل.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$، إذن المقام يساوي $4x(x+2)(x+4)$.

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

(2 ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرَّفة؟

A $5, 0, -2$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2, -6$ **D** $5, -2, -6$

قراءة الرياضيات

قيم x التي تجعل العبارة غير معرَّفة
لإيجاد قيم x التي تكون العبارة عندها غير معرَّفة، استعمل العبارة المعطاة قبل تبسيطها.

إرشادات للاختبار

بدائل السؤال
يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

في بعض الأحيان، يمكنك إخراج العدد 1- كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة في تبسيط العبارة النسبية.

مثال 3 تبسيط عبارة نسبية بإخراج 1– كعامل مشترك

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(a $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

$$\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)} = \frac{w(4w-3y)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)} \quad \text{حلّل إلى عوامل}$$

$$= \frac{w(-1)\overset{1}{\cancel{(3y-4w)}}(w+y)}{\underset{1}{\cancel{(3y-4w)}}(5w+y)} \quad 4w-3y=-1(3y-4w)$$

$$= \frac{(-w)(w+y)}{5w+y} \quad \text{بسّط}$$

(b $\frac{x^3-y^3}{y-x}$

$$\frac{x^3-y^3}{y-x} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y-x} \quad \text{حلّل إلى عوامل}$$

$$= \frac{(-1)\overset{1}{\cancel{(y-x)}}(x^2+xy+y^2)}{\underset{1}{\cancel{(y-x)}}} \quad x-y=-1(y-x)$$

$$= -x^2-xy-y^2 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

(3A $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$ **(3B** $\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

والجدول الآتي يلخصُ قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

مثال: $\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال: $\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2}$

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$ حلِّل إلى عوامل

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{\cancel{d}} \cdot d}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{d}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$ بسِّط

$$= \frac{9c^2d}{4a}$$ بسِّط

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \left(\frac{18 \times 35}{7 \times 12}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{b}{b^2}\right)$$ جمِّع العوامل

$$= \left(\frac{\overset{1}{\cancel{6}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{7}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{6}} \times 2 \times \underset{1}{\cancel{7}}}\right) \cdot x^{1-2} \cdot y^{3-1} \cdot a^{2-2} \cdot b^{1-2}$$ استعمل قوانين الأسس واختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{15}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^2 \cdot a^0 \cdot b^{-1}$$ بسِّط

$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b^1}$$ تعريف الأسس السالبة

$$= \frac{15y^2}{2xb}$$ بسِّط

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

تحقق من فهمك

(4A $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

(4B $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

(4C $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

(4D $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان عليك أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

مثال 5 عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كلٍّ من بسطها ومقامها

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6}$

$$\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)} \cdot \frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$$ حلّل إلى عوامل

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-8)}}\overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-8)}}\underset{1}{\cancel{(x-8)}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x-8}}}{(x+3)\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{1}{x+3}$$ بسّط

(b $\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

$$\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18} = \frac{x^2-16}{12y+36} \cdot \frac{y^2-3y-18}{x^2-12x+32}$$ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)} \cdot \frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$$ حلّل إلى عوامل

$$= \frac{(x+4)\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{12\underset{1}{\cancel{(y+3)}}} \cdot \frac{(y-6)\overset{1}{\cancel{(y+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-4)}}(x-8)}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{(x+4)(y-6)}{12(x-8)}$$ بسّط

تحقق من فهمك

(5A $\frac{8x-20}{x^2+2x-35} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$

(5B $\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21} \div \frac{x^2-x-12}{6x+42}$

تبسيط الكسور المركّبة: **الكسر المركّب** يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورًا، والعبارات الآتية كسور مركّبة:

$$\frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3} \qquad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}} \qquad \frac{\frac{8}{x}}{x-2} \qquad \frac{\frac{c}{6}}{5d}$$

ولتبسيط كسر مركّب، اكتبه أولًا على صورة قسمة عبارتين.

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ويتم اختصارها كما في المثال $5a$.

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

$\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \dfrac{a+b}{4} \div \dfrac{a^2+b^2}{4}$ اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{a+b}{4} \cdot \dfrac{4}{a^2+b^2}$ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{a+b}{\cancel{4}_{1}} \cdot \dfrac{\cancel{4}^{1}}{a^2+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ اختصر العوامل المشتركة وبسّط

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

$\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \div \dfrac{4x}{y-x}$ اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{y-x}{4x}$ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \dfrac{(-1)(x-y)}{4x}$ حلّل إلى عوامل

$= \dfrac{x \cdot \cancel{x}^{1}}{(x+y)\cancel{(x-y)}_{1}} \cdot \dfrac{(-1)\cancel{(x-y)}^{1}}{4\cancel{x}_{1}}$ اختصر العوامل المشتركة

$= \dfrac{-x}{4(x+y)}$ بسّط

تحقق من فهمك

6A) $\dfrac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$

6B) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2 3) **اختيار من متعدد:** حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرَّفة.

A $-7, 4$ B $4, 7$ C $-7, 4, 7$ D $-4, 7$

الأمثلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

(8 $\dfrac{12x^3y}{13ab^2} \div \dfrac{36xy^3}{26b}$

(9 $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \dfrac{x-4}{x^2-2x-35}$

(10 $\dfrac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$

(11 $\dfrac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$

(12 $\dfrac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \dfrac{4a+4b}{a^2-1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسِّط كلّ عبارة ممّا يأتي:

(13 $\dfrac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

(14 $\dfrac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

(15 $\dfrac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

(16 $\dfrac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

مثال 2 (17 **اختيار من متعدد:** حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرَّفة.

A $-6, 3$ **B** $4, 6$ **C** $-6, 6$ **D** $-6, 3, 4, 6$

الأمثلة 3-6 بسِّط كلّ عبارة ممّا يأتي:

(18 $\dfrac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

(19 $\dfrac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

(20 $\dfrac{16-c^2}{c^2+c-20}$

(21 $\dfrac{3-3y}{y^3-1}$

(22 $\dfrac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \dfrac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

(23 $\dfrac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \dfrac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

(24 $\dfrac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \dfrac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

(25 $\dfrac{9x^2yz}{5z^4} \div \dfrac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

(26 $\dfrac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \dfrac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

(27 $\dfrac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \dfrac{c^2-8c}{c+d}$

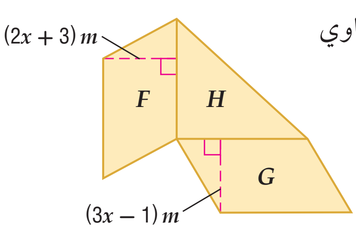
(28 $\dfrac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

(29 $\dfrac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

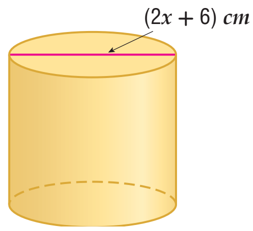
(30 $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

(31 $\dfrac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

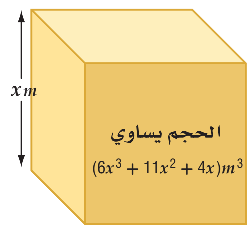
(32 **هندسة:** في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2+10x-3)\text{m}^2$ ، وارتفاعه $(2x+3)\text{m}$ ، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2+13x-5)\text{m}^2$ ، وارتفاعه $(3x-1)\text{ m}$، فأوجد مساحة المثلَّث القائم الزاوية H.



33) **هندسة:** إذا كان حجم الأسطوانة في الشكل أدناه $(x+3)(x^2-3x-18)\pi\ \text{cm}^3$، فأوجد ارتفاعها.



34) **هندسة:** يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3+11x^2+4x)\text{m}^3$ للتعبير عن حجم الصندوق في الشكل أدناه الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.



a) أوجد بعدي الصندوق الآخرين.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكلِّ قيم x ؟

35) **تلوث:** تمثِّل الدالّة $T(x) = \dfrac{0.4(x^2-2x)}{x^3+x^2-6x}$ سُمْك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

a) اكتب الدالّة في أبسط صورة.

b) ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

الربط بالحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

36) $\dfrac{x^3-4x}{2x^2-7x-4} \cdot \dfrac{x^2-16}{3x^3+18x^2+24x}$

37) $\dfrac{6x^2-7x-3}{2x^2-x-3} \div \dfrac{3x^2-17x-6}{4x^2-20x-24}$

38) $\left(\dfrac{2x^2+7x+3}{2x^2-15x+7}\right)^{-1} \cdot \dfrac{9-x^2}{x^2-4x-21}$

39) $\dfrac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3} \cdot \left(\dfrac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3$

40) $\dfrac{6a^2b}{x^2y^4} \div \left(\dfrac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2}$

41) $\dfrac{\dfrac{2x^2+7x-30}{-6x^2+13x+5}}{\dfrac{4x^2+12x-72}{3x^2-11x-4}}$

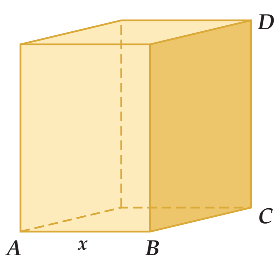
42) $\dfrac{\dfrac{4x^2-1}{3x^3-6x^2-24x}}{\dfrac{12x^2+12x-9}{-2x^2+5x+12}}$

43) **هندسة:** مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي $20\ \text{cm}^2$.

a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x.



بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(44 $\dfrac{6x^2-18x-60}{x^3-4x} \div \dfrac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \cdot \dfrac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5}$

(45 $\dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24} \cdot \dfrac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \div \dfrac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36}$

(46 $\dfrac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12} \div \dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \dfrac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18}$

(47 **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال العلاقة بين العبارة النسبية قبل تبسيطها وبعده.

a) **جبريًا:** بسِّط العبارة: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$.

b) **جدوليًا:** إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالّة $g(x)$ المرتبطة بالدالّة $f(x)$، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلتّا الدالّتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) **تحليليًا:** أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$ و $g(4)$، ثم وضِّح الفرق بين القيمتين.

d) **لفظيًا:** ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالّة $g(x)$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(48 **تبرير:** قارن بين كلٍّ من $\dfrac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

(49 **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\dfrac{4}{y-x} \div \dfrac{x+y}{x-y}$. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

علي

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x} = \frac{-4}{x+y}$$

محمد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4} = -\frac{x+y}{4}$$

(50 **تحدٍّ:** ما قيمة y التي تجعل الجملة $\dfrac{y}{x-6} \cdot \dfrac{x-6}{x+3} = x-2$ صحيحة دائمًا، عدا عند $x=6$ و $x=-3$؟

(51 **تبرير:** هل الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسِّر إجابتك.
"العبارة النسبية التي تتضمن متغيرًا في المقام تكون معرَّفة لجميع الأعداد الحقيقية".

(52 **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\dfrac{x-1}{x+4}$.

(53 **اكتب:** إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\dfrac{x^2+3x}{4x}$ هو $\dfrac{x+3}{4}$. فوضِّح لماذا لا تكون هذه العبارة معرَّفة لجميع قيم x ؟

تدريب على اختبار

54) **احتمال:** إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{2}$

D $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{5-c}{c^2-c-20}$ ؟

A $\frac{5-c}{c-4}$

B $\frac{1}{c+4}$

C $\frac{5-c}{c+4}$

D $-\frac{1}{c+4}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

56) $\sqrt{x-8}+5=7$ (مهارة سابقة)

57) $\sqrt[3]{n+8}-6=-3$ (مهارة سابقة)

58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$

62) $2x(3y+9)$

63) $(x+6)(x+3)$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-2 جمع العبارات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق:

درست جمع كثيرات حدود وطرحها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيرها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حدٍّ ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيرها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler) . ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعبارة النسبية $f_s\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفير سيارة الإطفاء، وv سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود: تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية، فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين.

قراءة الرياضيات

LCM

الرمز (LCM) يمثِّل اختصارًا لـ :

Least Common Multiple

(المضاعف المشترك الأصغر)

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر، يجب أن تُحلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية أولًا، ثم تضرب جميع العوامل التي لها الأس الأكبر.

الأعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$
LCM للعددين 6, 9	**LCM لكثيرتي الحدود $x^2 - 3x + 2, 2x^2 - 2$**
$6 = 2 \cdot 3$	$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
$9 = 3 \cdot 3$	$2x^2 - 2 = 2 \cdot (x - 1)(x + 1)$
$\text{LCM} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	$\text{LCM} = 2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

a) $6xy, 15x^2, 9xy^4$

$6xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$ حلّل

$15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2$ حلّل

$9xy^4 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$ حلّل

$\text{LCM} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^4 = 90x^2y^4$ اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر وبسِّط

b) $y^4 + 8y^3 + 15y^2 , y^2 - 3y - 40$

$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$ حلّل

$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$ حلّل

$\text{LCM} = y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$ اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

✓ تحقق من فهمك

1A) $12a^2b, 15abc, 8b^3c^4$

1B) $4a^2 - 12a - 16, a^3 - 9a^2 + 20a$

جمع العبارات النسبية وطرحها: عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوحِّد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

جمع العبارات النسبية وطرحها

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية أو طرحها، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع أو اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

مثال: $\frac{2}{5} \pm \frac{1}{3} = \frac{2\cdot3}{5\cdot3} \pm \frac{5\cdot1}{5\cdot3} = \frac{2\cdot3 \pm 5\cdot1}{5\cdot3}$

مثال 2 جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

بسّط العبارة: $\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}$.

$\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}=\frac{3y}{2x^3}\cdot\frac{4y^2}{4y^2}+\frac{5z}{8xy^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}$ وحِّد المقامات باستعمال LCM وهو $8x^3y^2$

$=\frac{12y^3}{8x^3y^2}+\frac{5x^2z}{8x^3y^2}$ اضرب الكسور

$=\frac{12y^3+5x^2z}{8x^3y^2}$ اجمع البسطين

تحقق من فهمك

(2A $\frac{4}{5a^3b^2}+\frac{9c}{10ab}$

(2B $\frac{3a^2}{16b^2}-\frac{8x}{5a^3b}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

يستعمل LCM أيضًا لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بسِّط العبارة: $\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

$\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$ حلّل المقامين

$=\frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)}-\frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$ وحّد المقامين

$=\frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$ اطرح البسطين

$=\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$ بسِّط

تحقق من فهمك

(3A $\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{4}{5x+10}$

(3B $\frac{x-8}{4x^2+21x+5}+\frac{6}{12x+3}$

من طرائق تبسيط الكسور المركَّبة تبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركَّبة بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$.

$\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \dfrac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$ — LCM لمقامات البسط هو x ، LCM لمقامات المقام هو y

$= \dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$ — بسّط كلًّا من البسط والمقام

$= \dfrac{x+1}{x} \div \dfrac{y-x}{y}$ — اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{x+1}{x} \cdot \dfrac{y}{y-x}$ — اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{xy+y}{xy-x^2}$ — بسّط

إرشادات للدراسة

حدود غير معرَّفة
تذكّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

4A) $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

4B) $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كلٍّ من بسط العبارة ومقامها في LCM .

مثال 5 تبسيط الكسور المركَّبة بإيجاد (LCM) للمقامات

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$.

$\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \dfrac{xy}{xy}$ — LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

$= \dfrac{xy+y}{xy-x^2}$ — خاصية التوزيع

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 5 , 4 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة؛ لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

5A) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

5B) $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

5C) $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

5D) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

تأكد

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

1) $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$

2) $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$

3) $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$

4) $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 2 , 3 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

5) $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$

6) $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$

7) $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$

8) $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$

9) $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$

10) $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$

11) $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

12) $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

المثالان 4 , 5 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$

14) $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$

15) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$

16) $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

17) $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$

18) $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$

19) $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$

20) $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 2 , 3 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

21) $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$

22) $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$

23) $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$

24) $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$

25) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$

26) $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$

27) $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$

28) $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$

29) $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$

30) $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$

31) $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$

32) $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

المثالان 4 , 5 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

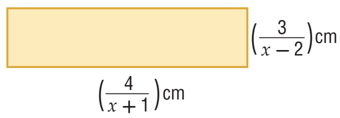
33) $\frac{\frac{2}{x - 3} + \frac{3x}{x^2 - 9}}{\frac{3}{x + 3} - \frac{4x}{x^2 - 9}}$

34) $\frac{\frac{4}{x + 5} + \frac{9}{x - 6}}{\frac{5}{x - 6} - \frac{8}{x + 5}}$

35) $\frac{\frac{5}{x + 6} - \frac{2x}{2x - 1}}{\frac{x}{2x - 1} + \frac{4}{x + 6}}$

36) $\frac{\frac{8}{x - 9} - \frac{x}{3x + 2}}{\frac{3}{3x + 2} + \frac{4x}{x - 9}}$

37) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.



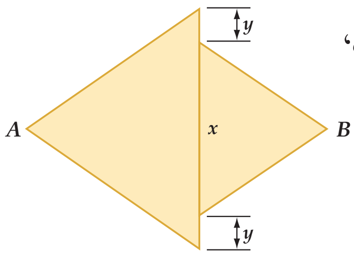
38) **أحياء:** يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة

$A = \frac{20.4t}{t^2+36} + 6.5$ ، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

a) بسّط الصيغة السابقة.

b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مُضِيٍّ 30 min على تناوله الطعام.

39) **هندسة:** إذا كان كلٌّ من المثلَّثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلَّث الأصغر $200\,cm^2$، ومساحة المثلَّث الأكبر $300\,cm^2$، فأوجد البُعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة.



الربط بالحياة

يقع حقل الغوار في المملكة العربية السعودية، وتبلغ مساحته $3000\,km^2$، وتم اكتشافه عام 1948م. وتقدَّر إنتاجيته بنحو 65% من إنتاج المملكة؛ أي حوالي 5 مليون برميل يوميًا، ويقدَّر احتياطيه من 70 إلى 170 مليار برميل.

40) **إنتاج النفط:** قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالّة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالّة $R(x)$.

b) ما معدّل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي:

41) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

42) $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

43) $\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$

44) $\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$

45) $\frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72}$

46) $\frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12}$

47) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$

48) $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8}$

49) $\dfrac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$

50) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$

51) **هندسة:** يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2-9}{x-2}$، ويعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة.

52) **زوارق:** قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h .

a) إذا كانت x تعبِّر عن السرعة الأولى بالأميال لكلِّ ساعة، فاكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها.

🌍 الربط بالحياة

الكاميرا الرقمية آلة تلتقط الصور الفوتوغرافية وتخزنها إلكترونيًا بدلاً من الأفلام. وبإمكان بعضها تسجيل الصوت أو الفيديو مع الصور. وتمتاز بالسرعة، وسهولة الاستخدام.

53) تصوير: يحدِّد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، فإنه يجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y كدالّة في المتغير x.

b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

54) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه بوحدة الجرام/ لتر (g /L) يُعطى بالدالّتين: $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$ ، $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالّتين لتحصل على دالّة تمثِّل تركيز النوعين معًا في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟

مسائل مهارات التفكير العليا

55) تحدٍّ: بسّط العبارة $\dfrac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$.

56) تبرير: حدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضِّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لأيِّ عدد حقيقي x.

57) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدٍّ، على أن يكون LCM لهنّ يساوي $180a^4b^6c$.

58) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

تدريب على اختبار

59) إذا كان $4=\frac{1}{a}+\frac{2a}{a}$، فما قيمة a؟

A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-1)

60) $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$ 61) $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$ 62) $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها (مهارة سابقة)

63) $y=-\sqrt{2x+1}$ 64) $y=\sqrt{5x-3}$ 65) $y=2\sqrt{3-4x}+3$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا: (مهارة سابقة)

66) $y=4(x+3)^2+1$ 67) $y=-(x-5)^2-3$ 68) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

69) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$ 70) $y=x^2+6x+2$ 71) $y=x^2-8x+18$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-3 تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق:

درست تمثيل دوالّ كثيرات الحدود بيانيًّا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحدِّد خصائص دوالّ المقلوب.
- أمثِّل تحويلات دوالّ المقلوب بيانيًّا.

المفردات:

خط التقارب
asymptote

خط التقارب الرأسي
vertical asymptote

خط التقارب الأفقي
horizontal asymptote

دالّة المقلوب
reciprocal function

القطع الزائد
hyperbola

لماذا؟

خطّطَت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًّا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

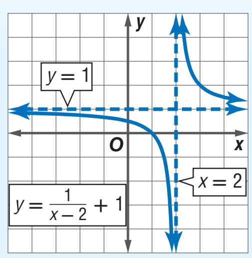
خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **خط التقارب** لدالّة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالّة. ولدالّة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ **خط تقارب رأسي** عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالّة.

مفهوم أساسي — خطوط التقارب للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ ، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرًا، أي أن خط التقارب الرأسي للدالّة هو $x = b$ ، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال:



وأما مجال الدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالّة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمًا لـ x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالّة.

تمثِّل الدالّة $c = \frac{5000}{n}$ دالّة مقلوب، و**دالّة المقلوب** التي سندرسها هي الدالّة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالّة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي — الدالّة الرئيسة (الأم) لدوالّ المقلوب

أضف إلى مطويتك

الدالّة الرئيسة (الأم): $f(x) = \frac{1}{x}$

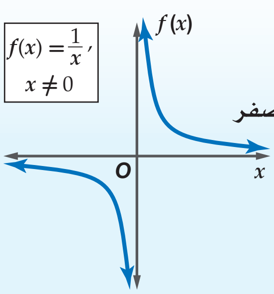
شكل التمثيل البياني: قطع زائد

المجال والمدى: جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر

خطا التقارب: $x = 0$ و $y = 0$

المقطعان: لا يوجد

تكون الدالّة غير معرَّفة عندما: $x = 0$



مجال دالّة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالّة عندها معرَّفة.

فمثلًا الدوالّ: $f(x)=\frac{-3}{x+2}$ ، $g(x)=\frac{4}{x-5}$ ، $h(x)=\frac{3}{x}$

غير معرَّفة عندما: $x=-2$ ، $x=5$ ، $x=0$

مثال 1 القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالّة غير معرَّفة)

حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x)=\frac{3}{2x+5}$ غير معرَّفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفرًا.

$$2x+5=0$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

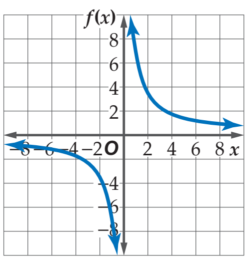
الدالّة غير معرَّفة عندما $x=-\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\frac{2}{x-1}$

1B) $f(x)=\frac{7}{3x+2}$

قد لا تكون بعض قيم x في دالّة المقلوب منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثّل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني والذي تكون فيه قيم x سالبة.



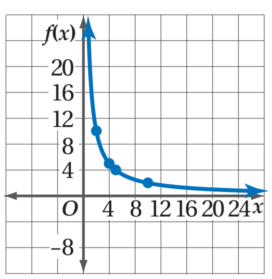
مثال 2 من واقع الحياة تمثيل دالّة المقلوب بيانيًا

سفر: مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{20}{x}$ بيانيًا، حيث تمثِّل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثِّل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكلِّ شخص بالأقدام المربعة.

بما أن عدد الأشخاص لا يكون صفرًا أو سالبًا، لذا استعمل الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للمتغير x.

عدد الأشخاص x	2	4	5	10
المساحة المخصصة للشخص $f(x)$	10	5	4	2

عيِّن النقاط $(2, 10)$، $(4, 5)$، $(5, 4)$، $(10, 2)$ في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط منحنٍ. وبما أن الدالّة غير معرَّفة عند $(x=0)$، فإن لها خط تقارب رأسي هو $x=0$؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $x=0$ (المحور y) ولا يمسّه، وبالمثل للدالّة خط تقارب أفقي $y=0$ (المحور x)؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $y=0$ ولا يمسه، لذا مُدّ المنحنى الذي رسمته في اتجاه كلٍّ من المحورين x, y الموجبين، ولكن دون أن يمس أيًّا منهما، كما هو مبيّن في الشكل المجاور.



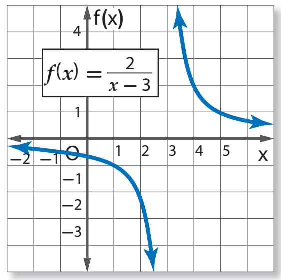
تحقق من فهمك

2) **حدائق:** حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $18\ cm^2$ ، والدالّة $l=\frac{18}{w}$ تبيّن العلاقة بين طولها وعرضها. مثِّل هذه الدالّة بيانيًا.

مثال 3 تحديد خصائص دوالّ المقلوب

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

(a



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $f(x)$ عندها غير معرَّفة.

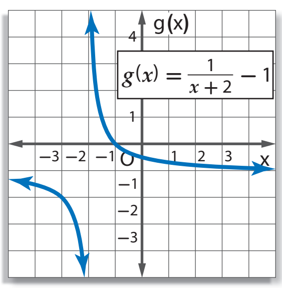
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرَّفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$ ، وبما أن $c = 0$ فإنه، يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 0$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلَّت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$) .

مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر .

(b



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $g(x)$ عندها غير معرَّفة.

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

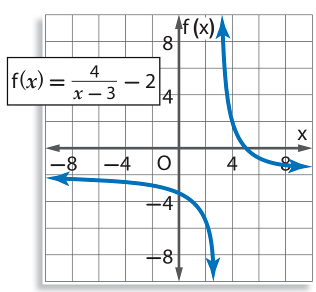
$g(x)$ غير معرَّفة عند $x = -2$، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$ ، وبما أن $c = -1$ ، فإنه يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1 أيضًا، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$).

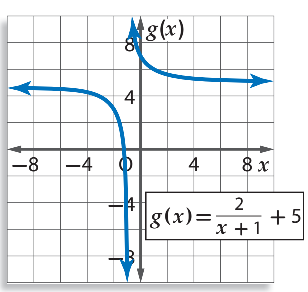
مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1 .

تحقق من فهمك

(3A



(3B



إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالّة عندها غير معرَّفة. أما خط التقارب الأفقي فيبيِّن سلوك طرفَي التمثيل البياني.

يمكنك استعمال دوالّ المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

الربط بالحياة

تأسست الخطوط الجوية العربية السعودية في عام 1946 م، وكانت أولى رحلاتها الدولية إلى مطار (اللد) الفلسطيني لنقل الحجاج. وفي عام 2013 م حققت الشركة أعلى معدل نقل للركاب (25.241.421 راكبًا) على (177.435) رحلة داخلية ودولية، وأحرزت المركز الثاني عالميًا (90.46%) في انضباط مواعيد الرحلات.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوالّ المقلوب

طيران: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

a) اكتب دالّة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r. ومثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t .

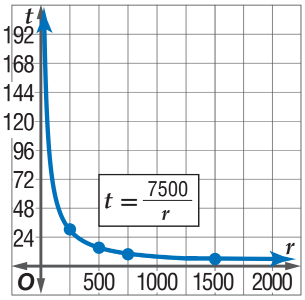
$rt = d$ المعادلة الأصلية

$t = \frac{d}{r}$ اقسم كل من الطرفين على r

$t = \frac{7500}{r}$ $d = 7500$

مثّل الدالّة $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًّا، عين النقاط:

(1500,5) ،(750,10) ،(500,15) ،(250,30)



b) وضّح أيّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة في هذه الحالة غير منطقية. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظمى، وأخرى صُغرى تستطيع الطيران بها.

تحقق من فهمك

4) **رحلات:** نظّم طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة أهلية رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالًا ثمنًا للوجبات الغذائية، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالّة تمثّل متوسط التكلفة الكلّية للطالب الواحد ومثّلها بيانيًّا. ووضّح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى.

تأكد

مثال 1

1) حدّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x) = \frac{5}{4x-8}$ غير معرَّفة.

مثال 2

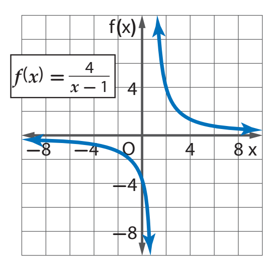
مثّل كلَّ دالّة ممّا يأتي بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منها:

2) $f(x) = \frac{5}{x}$ **3)** $f(x) = \frac{2}{x+3}$

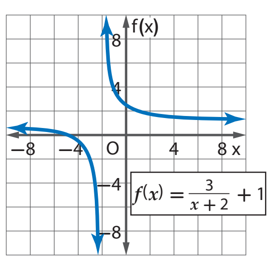
مثال 3

حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

4)



5)



مثال 4

6) **هدية جماعية:** يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالًا إلى أحد أصدقائهم.

a) فإذا كانت c تمثّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم، و f عدد الأصدقاء، فاكتب دالّة تمثّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم بدلالة عدد الأصدقاء.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) وضّح أيّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد قيمة x التي تجعل كلَّ دالّة فيما يأتي غير معرَّفة.

(7 $f(x) = \frac{5}{2x}$ **(8** $f(x) = \frac{x}{x-7}$ **(9** $f(x) = \frac{4}{3x+9}$

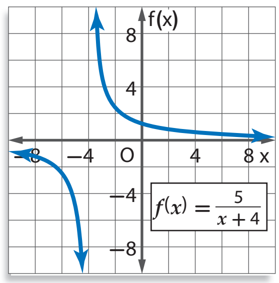
مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

(10 $f(x) = \frac{3}{x}$ **(11** $f(x) = \frac{-4}{x+2}$ **(12** $f(x) = \frac{2}{x-6}$

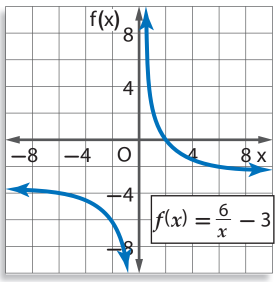
(13 $f(x) = \frac{-2}{x-5}$ **(14** $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$ **(15** $f(x) = \frac{9}{x+3} + 6$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

(16



(17



مثال 4 **(18** **كيمياء:** لدى محمد 200 جرام (g) من سائل مجهول. وتساعد معرَّفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

a) اكتب دالّة تمثِّل كثافة هذا السائل (d) بدلالة حجمه (v).

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالّة.

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

(19 $f(x) = \frac{5}{3x}$ **(20** $f(x) = \frac{2}{4x+1}$ **(21** $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

(22 **تمثيلات متعددة:** افترض أن $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) **جدوليًّا:** أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالّتين.

b) **بيانيًّا:** استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالّتين بيانيًّا.

c) **لفظيًّا:** قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدِّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

d) **تحليليًّا:** اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوالّ التي على الصورة $f(x) = \frac{1}{x^n}$، عندما تكون n عددًا زوجيًّا، وعندما تكون n عددًا فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

23) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$.

24) **تبرير:** قارن بين التمثيلين البيانيين لكلِّ زوج من المعادلات الآتية موضِّحا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

a) $y = \frac{1}{x},\ y - 7 = \frac{1}{x}$

b) $y = \frac{1}{x},\ y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $y = \frac{1}{x},\ y = \frac{1}{x+5}$

d) استعمل ملاحظاتك في الفروع a - c؛ لتمثيل الدالّة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قِيم.

25) **أيُّها لا ينتمي؟** حدِّد الدالّة المختلفة عن الدوالّ الثلاث الأخرى، ووضِّح إجابتك.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$	$g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$	$h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$	$j(x) = \frac{20}{x-7}$

26) **تحدٍّ:** اكتب دالّتَي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكلٍّ منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثِّل هاتين الدالّتين بيانيًّا.

27) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضِّح كيف يمكن استعمال دوالّ المقلوب عند جمع التبرعات. وبيِّن لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالّة فقط منطقيًّا بالنسبة لسياق الموقف.

تدريب على اختبار

28) ما مجال الدالّة $f(x) = \frac{8}{x+3}$ ؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -3.

29) ما قيمة العبارة $(x+y)\ (x+y)$، إذا كانت $xy = -3,\ x^2 + y^2 = 10$؟

A 4

B 7

C 13

D 16

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-1)

30) $\dfrac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$

31) $\dfrac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$

32) $\dfrac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

أوجد $(f+g)\ (x),\ (f-g)\ (x)\ ,\ (f.g)\ (x)\ ,\ (\frac{f}{g})\ (x)$ للدالّتين $f(x),\ g\ (x)$ في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

33) $f\ (x) = x+9$ ، $g\ (x) = x-9$

34) $f\ (x) = 2x-3$ ، $g\ (x) = 4x+9$

35) $f\ (x) = 2x^2$ ، $g\ (x) = 8-x$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (مهارة سابقة)

36) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

37) $f(x) = |\ x - 5\ |$

38) $f(x) = x^2 - 4$

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-1 إلى 3-1

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$

4) $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

5) $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6) $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأيٌّ ممَّا يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8) **اختيار من متعدد:** ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّفة؟

A $-3, -1$ C $-3, -1, 9$

B $-9, 1, 3$ D -1

9) أوجد LCM لكثيرتَي الحدود $3-3x$ ، x^2-x .

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$

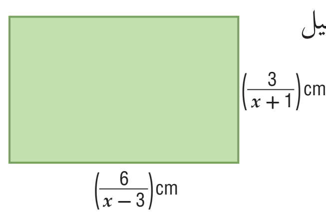
11) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$

12) $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$

13) $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور .



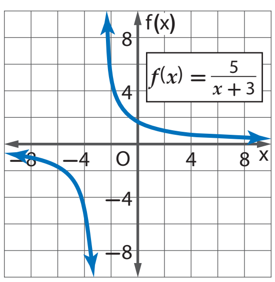
16) **سفر:** سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 km عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 km/h .

a) إذا كانت x تمثِّل السرعة الأولى، فاكتب عبارةً تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة.

17) حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى للدالّة الآتية:



مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

18) $f(x) = \frac{6}{x-1}$

19) $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$

20) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$

21) $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

22) **شطائر:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كلُّ شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

a) إذا كانت x تمثِّل عدد الأصدقاء المشاركين في الرحلة، فاكتب دالّة تمثِّل هذا الموقف.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

فيما سبق:

درست تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا. الدرس (1-3)

والآن:

- أمثِّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثِّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:

الدالّة النسبية
rational function

نقطة الانفصال
point discontinuity

لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالًا، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

يمكنه استعمال الدالّة النسبية $C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$

لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **الدالّة النسبية** هي دالّة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالّة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي: خطوط التقارب الرأسية والأفقية

أضف إلى مطويتك

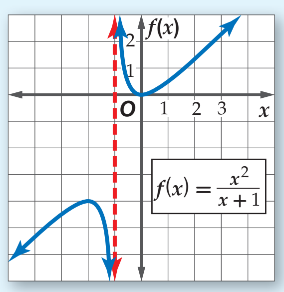
التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$$

أمثلة:

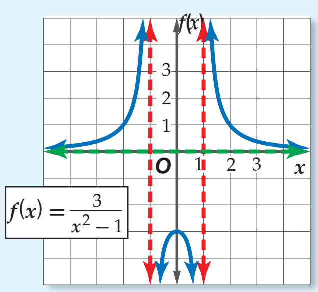
لا يوجد خط تقارب أفقي



خط التقارب الرأسي:

$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد

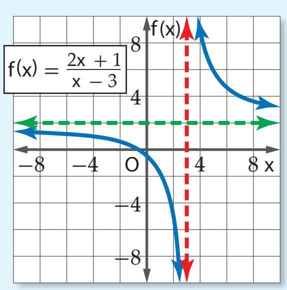


خطا التقارب الرأسي:

$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:

$y = 0$



خط التقارب الرأسي:

$x = 3$

خط التقارب الأفقي:

$y = 2$

إرشادات للدراسة

مجال الدالّة النسبية

مجال الدالّة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء تلك الأعداد التي تجعل المقام صفرًا.

يمكنك استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا، كما يمكنك استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالّة، فإذا كان هناك خط تقارب رأسي واحد، فإن التمثيل ينقسم إلى فرعين، أما إذا كان هناك خطًّا تقارب فإنه ينقسم إلى ثلاثة أفرع.

مثال 1 التمثيل البياني لدالّة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثِّل الدالّة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أوجد مجال الدالّة.

$x - 1 = 0$ $b(x) = 0$

$x = 1$ أضف 1 لكلا الطرفين

إذن مجال الدالّة هو جميع الأعداد باستثناء $x = 1$.

الخطوة 2: أوجد خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

بما أن المقام يصبح صفرًا عند $x = 1$.

إذن يوجد خط تقارب رأسي للدالّة عند $x = 1$.

وبما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالّة.

الخطوة 3: أوجد أصفار الدالّة.

$x^2 = 0$ $a(x) = 0$

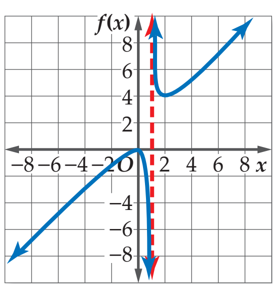
$x = 0$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

يوجد للدالّة صفر عندما $x = 0$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالّة يقطع المحور x عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 4: مثِّل بيانيًّا.

أنشئ جدول قيم للدالّة لتجد أزواجًا مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.

x	$f(x)$
−3	−2.25
−2	−1.33
−1	−0.5
0	0
0.5	−0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5



تحقق من فهمك

(1 $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكنك استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لإنشاء جدول قيم للدالّة عندما تكون القيم في الصورة العشرية.

الربط بالحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني للدوالّ النسبية

متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

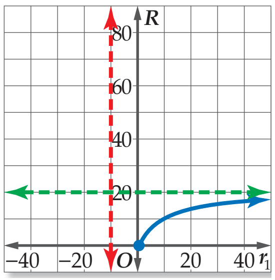
a) إذا كان r_1 هو المتغيِّر المستقل، و R هو المتغيِّر التابع، فمثِّل الصيغة بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h .

بتعويض قيمة r_2 تصبح الدالّة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

وَ خط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثِّل خطَّي التقارب والدالّة بيانيًّا.



b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب؛ لذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، وقيم R المنطقية هي بين 0 و 20 .

تحقق من فهمك

2) **رواتب:** تستعمل إحدى الشركات الدالّة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا. وحدِّد القيم المنطقية لمجال الدالّة ومداها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالّة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط ومُعرفةً حولها.

مفهوم أساسي — نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

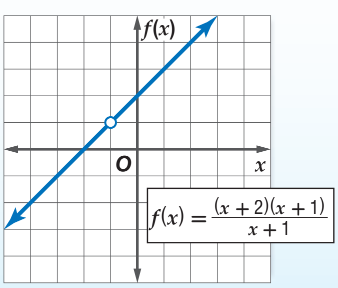
التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$ ، وكان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$ ، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

مثال:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x + 2 , \quad x \neq -1$$

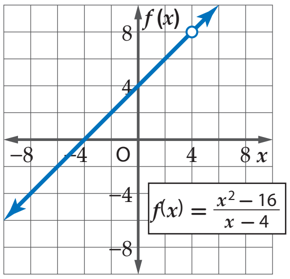
نقطة الانفصال هي:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



مثال 3 التمثيل البياني لدالّة تتضمن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًّا .



لاحظ أن مجال الدالّة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)\cancel{(x - 4)}^{1}}{\cancel{x - 4}_{1}} = x + 4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو نفسه

التمثيل البياني للدالّة $f(x) = x + 4$، مع وجود فجوة في

التمثيل البياني للدالّة $f(x) = x + 4$ عندما $x = 4$.

✓ تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$ **3B)** $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9}$

تنبيه !

فجوات التمثيل البياني

تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسّط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالّة.

✓ تأكـد

مثال 1 مثِّل الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$ **2)** $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$

مثال 2 **3) كرة سلة :** في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثّلة بالدالّة $P(x) = \frac{7 + x}{11 + x}$، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

a) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) أيُّ جزء من التمثيل البياني للدالّة منطقي في سياق المسألة؟

c) ماذا يمثِّل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثّلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$ **5)** $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

6) $f(x) = \frac{x^2}{6x + 12}$ **7)** $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 1}$

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

8) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$ **9)** $f(x) = \frac{5}{(x - 1)(x + 4)}$ **10)** $f(x) = \frac{1}{(x + 4)^2}$

11) $f(x) = \frac{2x}{(x + 2)(x - 5)}$ **12)** $f(x) = \frac{4}{(x - 2)^2}$ **13)** $f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$

14) **كهرباء:** دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطى شدة التيار الكهربائي بالأمبير فيها بالمعادلة $C = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1 , R_2 , R_3 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغيِّر المستقل، و C هو المتغيِّر التابع، فمثِّل المعادلة بيانيًّا عندما تكون $V = 120\text{ v} , R_2 = 25\,\Omega , R_3 = 75\,\Omega$.

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1، ومقطع المحور C للتمثيل البياني.

c) أوجد قيمة C عندما تكون $R_1 = 140\,\Omega$.

d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

16) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$

18) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة ممَّا يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$

20) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$

21) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$

22) **اتصالات:** اشترى أحمد هاتفًا محمولًا مزودًا بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 200 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهريًّا لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، وثمن خدمة الإنترنت.

a) اكتب دالّة نسبية تمثِّل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهرًا من شراء الهاتف، ومثِّلها بيانيًّا.

b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالّة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالًا؟

الربط بالحياة

أشار مسح عالمي إلى أن مستخدمي الهواتف النقالة في المملكة العربية السعودية أكثر من أي دولة في العالم؛ بمعدل 180 هاتفًا نقالًا لكل 100 فرد.

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

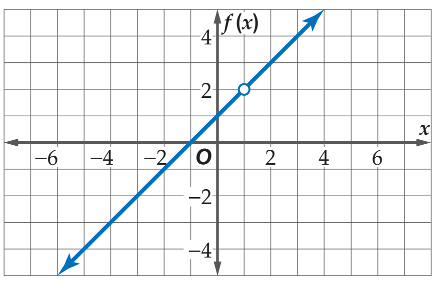
23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

24) $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **مسألة مفتوحة:** مثِّل بيانيًّا بشكل تقريبيٍّ دالّة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$.

26) **تحدٍّ:** اكتب دالّة نسبية لها التمثيل البياني المجاور .



27) **تبرير:** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالّتين: $f(x) = x - 2 , g(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{x+3}$ ؟

28) برهان: إذا علمت أن الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة: $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$، فأثبت أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالّة نسبية.

29) اكتب: وضِّح كيف يمكن استعمال تحليل البسط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالّة نسبية.

تدريب على اختبار

30) يريد عليٌّ أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟

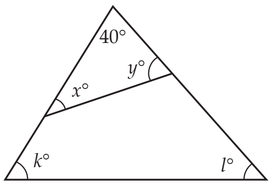
A 48

B 18

C 15

D 12

31) هندسة: في الشكل المجاور، ما قيمة $x + y + k + l$ ؟



A 140

B 280

C 320

D 360

مراجعة تراكمية

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (الدرس 3-1)

32) $f(x) = \frac{-5}{x+2}$

33) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

34) $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 2-1)

35) $\frac{2}{3m+6} + \frac{m}{m^2-4}$

36) $\frac{d+2}{d^2-16} + \frac{d-4}{d^2+2d-8}$

37) $\frac{6y}{y^2-9} - \frac{y}{y+3}$

38) $\frac{7}{2x-14} + \frac{5}{x^2-3x-28}$

39) سفر: يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق.

b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق.

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

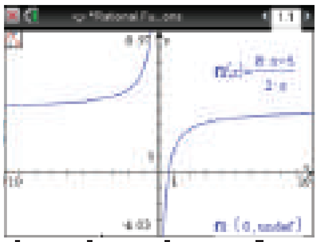
يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوالّ النسبية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالّة لها خطوط تقارب

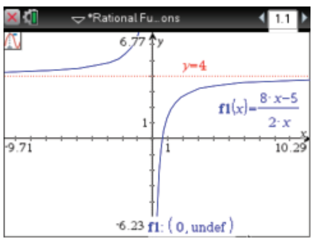
مثِّل الدالّة $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًّا، وأوجد معادلات خطوط التقارب.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا.

اضغط مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر ÷ ctrl، ثم اكتب الدالّة واضغط enter. ولتحديد خطوط التقارب اضغط menu، ومنها اختر 5: تتبع المسار، ومنها 1: تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عندما $x = 0$، وتظهر النقطة $(0, \text{undef})$ وخط التقارب الرأسي.



[−10, 10] scl:1 by [−4.8, 8.97] scl:1



[−9.71, 10.29] scl:1 by [−6.23, 6.77] scl:1

الخطوة 2: أوجد معادلات خطوط التقارب.

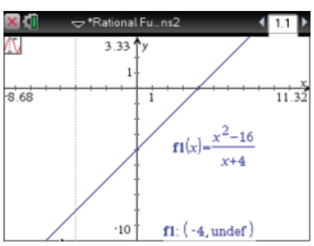
بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرَّفة أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالّة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2 التمثيل البياني لدالّة تتضمَّن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا.

اضغط مفتاح on ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر ÷ ctrl، ثم اكتب الدالّة واضغط enter. ولتحديد نقاط الانفصال اضغط menu ومنها اختر 5: تتبع المسار ومنها 1: تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبَّع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عند $x = -4$، وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال $(-4, \text{undef})$.



[−8.68, 11.32] scl:1 by [−10, 3.33] scl:1

الخطوة 2: أوجد نقاط الانفصال.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلِّ دالّة مما يأتي بيانيًّا، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$

5) $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$

6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-5 دوالّ التغيُّر
Variation Functions

فيما سبق:

درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحل مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك.
- أحل مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب.

المفردات:

التغيُّر الطردي
direct variation

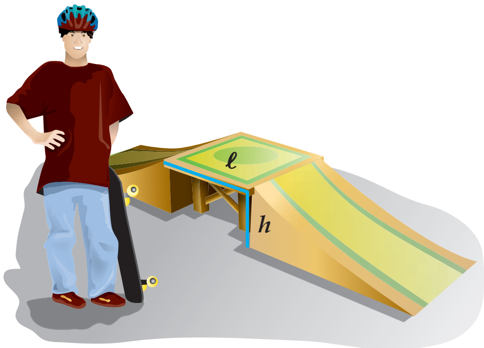
ثابت التغيُّر
constant of variation

التغيُّر المشترك
joint variation

التغيُّر العكسي
inverse variation

التغيُّر المركّب
combined variation

لماذا؟



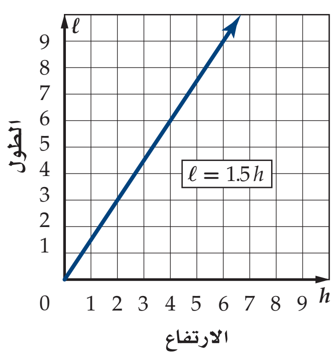
وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصّة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصّة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى نسبة الطول إلى الارتفاع ثابتة، وعندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة، تسمى العلاقة بينهما **(تغيّرًا طرديًّا)** كما درست سابقًا، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًّا مع ارتفاعها.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة ($\frac{\ell}{h}$)
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$ وهي مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبّر عن التغيُّر الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.

لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.



وللتعبير عن التغيُّر الطردي، فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًّا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير سالبًا.

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيّر y طرديًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$. ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًّا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر

في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب ، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين ، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$

$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًّا؛ أي أن y تتناسب طرديًّا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y=15$ عندما $x=5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=7$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$ تناسب طردي

$\frac{15}{5}=\frac{y_2}{7}$ $y_1=15$، $x_1=5$ ، $x_2=7$

$15(7)=5(y_2)$ بالضرب التبادلي

$105=5y_2$ بسِّط

$21=y_2$ اقسم كل من الطرفين على 5

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t، وكانت $r=-20$ عندما $t=4$، فأوجد قيمة r عندما $t=-6$.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك،** ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k\neq 0$ ، بحيث $y=kxz$.

مثال: إذا كانت: $x=6, z=-2, y=-60$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z، حيث إن: $k=5 \Leftarrow y=-60=5(6)(-2)=kxz$ ، فإن قيمة y عندما $x=4, z=-5$ تكون: $y=5\times4\times(-5)=-100$.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك

يصنِّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركّب الذي ستدرسه لاحقًا.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1=kx_1z_1 \quad , \quad y_2=kx_2z_2$$

$$\frac{y_1}{x_1z_1}=k \quad\quad \frac{y_2}{x_2z_2}=k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1}=\frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y=20$ عندما $x=5$ و $z=3$، فأوجد قيمة y عندما $x=9$ و $z=2$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

$\frac{y_1}{x_1z_1}=\frac{y_2}{x_2z_2}$ تناسب مشترك

$\frac{20}{5(3)}=\frac{y_2}{9(2)}$ $y_1=20, x_1=5, z_1=3, x_2=9, z_2=2$

$20(9)(2)=5(3)(y_2)$ بالضرب التبادلي

$360=15y_2$ بسِّط

$24=y_2$ اقسم كل من الطرفين على 15

تحقق من فهمك

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r=70$ عندما $v=10$ و $t=4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v=2$ ، و $t=8$.

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي**، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

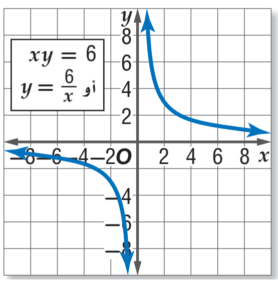
التغيُّر العكسي

التعبير اللفظي: تتغير y عكسيًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $x\,y = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$، بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

x	6	3	2
y	1	2	3

إذا كانت y تتغيَّر مع x كما في الجدول المجاور، فإنك تلاحظ أن قيم x تزداد بتناقص قيم y، وهما كميتان موجبتان؛ لذا فإن y تتغير تغيُّرًا عكسيًّا مع x بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$، ويكون التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.



وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه التمثيل البياني لدالّة المقلوب تمامًا.

يمكنك استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيّرًا عكسيًّا مُعطًى فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1\,y_1 = k \text{ ، } x_2\,y_2 = k$$

$$x_1\,y_1 = x_2 y_2$$

ومن ذلك نجد أنَّ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

مثال 3 التغيُّر العكسي

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = 2$، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$a_1\,b_1 = a_2\,b_2$	تناسب عكسي
$28(2) = 10(a_2)$	$a_1 = 28, b_1 = 2, b_2 = 10$
$56 = 10(a_2)$	بسّط
$5\frac{3}{5} = a_2$	اقسم كلًا من الطرفين على 10

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = -12$.

يُستعمل التغيُّر العكسي في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: **يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود f عكسيًّا مع طول السلك l. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.**

افترض أن $l_1 = 10, f_1 = 512$, $l_2 = 8$. وأوجد قيمة f_2.

$l_1 f_1 = l_2 f_2$	المعادلة الأصلية
$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$	$f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8$
$\frac{5120}{8} = f_2$	اقسم كل من الطرفين على 8
$640 = f_2$	بسِّط

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

4) **فضاء:** يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \quad , \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 — التغيُّر المركّب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h ، وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

استعمل تناسبًا يربط القيم.

$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$	تناسب مركب
$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$	$f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$
$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$	اضرب تبادليًا
$-1296 = 12g_2$	بسِّط
$-108 = g_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 12

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$. فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركّب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا مع y في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تأكـد

الأمثلة 3–1

1) إذا كانت y تتغيّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

2) إذا كانت y تتغيّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

3) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

مثال 4

4) **خرائط:** تتناسب المسافات على الخرائط تناسبًا طرديًّا مع المسافات الفعلية على سطح الأرض. إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما.

مثال 5

5) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

6) إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$.

7) إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$.

8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلًا ، ووزنه على سطح القمر 60 رطلًا ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر.

مثال 2

إذا كانت a تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

9) إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$.

10) إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$.

مثال 3

إذا كانت f تتغيَّر عكسيًّا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

11) إذا كانت $f = -12$، عندما $g = 19$.

12) إذا كانت $f = 0.6$، عندما $g = -21$.

مثال 4

13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغيَّر طرديًّا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي تمثل هذا الموقف.

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه.

مثال 5

14) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$.

حدِّد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيُّرًا طرديًّا، أو تغيُّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

15)

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

16)

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

17)

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

18) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$.

حدِّد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيُّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركّبًا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كلٍّ منها :

19) $a = 27b$

20) $c = \frac{7}{d}$

21) $-10 = gh$

22) $m = 20cd$

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

23) **كيمياء:** يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t . وعكسيًّا مع ضغطه p حيث $(v = \frac{kt}{p})$.

a) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركًا أم مركّبا؟

b) عينة من الغاز حجمها 8 لترات، ودرجة حرارتها °275 كلفن ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 لترات وتسخينها إلى درجة حرارة °300 كلفن . كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

24) **جاذبية:** ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغيَّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84 \times 10^8\ \mathrm{m}$ تقريبًا، وكتلة القمر $7.36 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}$. وكتلة الأرض $5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$ تقريبًا، وكتلة الشمس $1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$ تقريبًا، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركّب، تتغيَّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما توصل إلى التناسب الصحيح ؟ وضِّح إجابتك.

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1y_1}{x_1}, k = \frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1} = \frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1x_1}{y_1}, k = \frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1} = \frac{z_2x_2}{y_2}$$

26) **تبرير:** وضِّح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيّر المشترك تغيُّرًا مركّبا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركّب مشتركًا.

27) **مسألة مفتوحة:** صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها.

28) **اكتب:** حدِّد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b ، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 15$ عندما $c = 2$, $a = 4$ فما قيمة b عندما $a = 7$, $c = -8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ C $\frac{1}{105}$

B -105 D 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A طردي   C مشترك

B عكسي   D مركّب

مراجعة تراكمية

حدِّد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالّة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-1)

31) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ 32) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4}$ 33) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

أوجد LCM لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-1)

34) $a, 2a, a + 1$ 35) $8, 24x, 12$ 36) $x^4, 3x^2, 2xy$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات نسبية. الدرس (1-1)

والآن:

- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:

المعادلة النسبية
rational equation

المتباينة النسبية
rational inequality

لماذا؟

يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهريًّا بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع مبلغًا مقداره $(200+10x)$ ريالًا في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة :

$\frac{200+10x}{x}$ ، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالًا، عليك أن تحل المعادلة $30 = \frac{200+10x}{x}$.

حل المعادلات النسبية : تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات؛ لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل لاستثناء القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا.

مراجعة المفردات

الحل الدخيل
هو الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$.

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$$ اضرب المعادلة في LCM للمقامات

$$\frac{(x+3)\overset{1}{\cancel{(x+5)}}(2x)}{\underset{1}{\cancel{x+5}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}\overset{1}{\cancel{(x+5)}}(x^2-x-10)}{\underset{1}{\cancel{x^2+8x+15}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x+5)3}{\underset{1}{\cancel{x+3}}}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$$ بسّط

$$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$$ خاصية التوزيع

$$x^2+7x+10 = 3x+15$$ بسّط

$$x^2+4x-5 = 0$$ اطرح $3x+15$ من كلا الطرفين

$$(x+5)(x-1) = 0$$ حلّل إلى عوامل

$$x-1=0 \text{ أو } x+5=0$$ خاصية الضرب الصفري

$$x=1 \quad \text{أو} \quad x=-5$$

تحقق: اختبر $x = -5$:

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$ $x = -5$

$$\frac{-10}{0} - \frac{25+5-10}{25-40+15} \neq -\frac{3}{2} \quad ✗$$ بسّط

اختبر $x = 1$:

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$ $x = 1$

$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$ بسّط

$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$ وحّد المقامات

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad ✓$$ بسّط

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

تحقق من فهمك

(1A $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$

(1B $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

(1C $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$

(1D $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة d والسرعة r والزمن t لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكنك استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t = \frac{d}{r}$, $r = \frac{d}{t}$.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال المعادلات النسبية في مسائل الحركة

تجديف: ركب سعيد قاربًا سرعته 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهابًا وإيابًا والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi عكس اتجاه التيار.
والمعادلة التي تُستعمل للحل هي:
$d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة

عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

حل:

$$\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$$ اكتب المعادلة

$$(6+v)(6-v)\frac{5}{6+v}+(6+v)(6-v)\frac{5}{6-v}=(6+v)(6-v)(3)$$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات $(6+v)(6-v)$

$$\underset{1}{\cancel{(6+v)}}(6-v)\frac{5}{\underset{1}{\cancel{6+v}}}+(6+v)\underset{1}{\cancel{(6-v)}}\frac{5}{\underset{1}{\cancel{6-v}}}=(6+v)(6-v)(3)$$ اختصر العوامل المشتركة

$$(6-v)(5)+(6+v)(5)=(36-v^2)(3)$$ بسّط

$$30-5v+30+5v=108-3v^2$$ خاصية التوزيع

$$60=108-3v^2$$ بسّط

$$0=-3v^2+48$$ اطرح 60 من كلا الطرفين

$$0=-3(v+4)(v-4)$$ حلّل إلى عوامل

$$0=(v+4)(v-4)$$ اقسم كل من الطرفين على -3

$v=4$ أو $v=-4$ (مرفوض لأن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة) خاصية الضرب الصفري

تحقق:

$$\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{5}{6+4}+\frac{5}{6-4}\stackrel{?}{=}3$$ $v=4$

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}3$$ بسّط

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{6}{2}\ \checkmark$$ بسّط ووحّد المقامات

لذا؛ فإن سرعة التيار هي 4 mi/h .

تحقق من فهمك

2) **طيران:** إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟

يمكنك حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المعادلات النسبية في مسائل العمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معًا لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الأول الثانوي لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معًا فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معًا
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

الربط بالحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل العلب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها. وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنويًا.

إرشادات للدراسة

جداول

تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

حُل: $\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$ اكتب المعادلة

$72j\,\frac{1}{24} + 72j\,\frac{1}{j} = 72j\,\frac{1}{18}$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات وهو $72j$

$\overset{3}{\cancel{72}}j\,\frac{1}{\underset{1}{\cancel{24}}} + 72\overset{1}{\cancel{j}}\,\frac{1}{\underset{1}{\cancel{j}}} = \overset{4}{\cancel{72}}j\,\frac{1}{\underset{1}{\cancel{18}}}$ اختصر العوامل المشتركة

$3j + 72 = 4j$ بسّط

$72 = j$ اطرح $3j$ من كلا الطرفين

تحقق: $\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$ المعادلة الأصلية

$\frac{1}{24} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{18}$ $j = 72$

$\frac{3}{72} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{4}{72}$ LCM للمقامات هو 72

$\frac{4}{72} = \frac{4}{72}$ ✓ بسّط

يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

✓ تحقق من فهمك

3) **طلاء:** يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

حل المتباينات النسبية: **المتباينات النسبية**، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي: حل المتباينات النسبية

أضف مطويتك

الخطوة 1: حدّد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة والتي تحصل عليها بوضع رمز المساواة بدلًا من رمز التباين في المتباينة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4 حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2 .

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$ المعادلة المرتبطة

$\overset{4}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \overset{1}{12}\cancel{(x-2)}\frac{1}{\underset{1}{\cancel{x-2}}} = \overset{3}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x+1}{\underset{1}{\cancel{4}}}$ اضرب في LCM للمقامات: $12(x-2)$

$4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$ خاصية التوزيع

$x^2 - 5x - 6 = 0$ اطرح $3x^2 - 3x - 6$ من كلا الطرفين

$(x-6)(x+1) = 0$ حلّل إلى عوامل

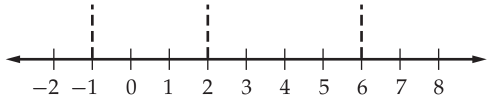
$x = 6$ أو $x = -1$ خاصية الضرب الصفري

إرشادات للدراسة

تقسيم خط الأعداد

من الضروري استعمال القيم المستثناة وحلول المعادلة المرتبطة جميعها عند تقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 3: ارسم خطًّا رأسيًّا عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.



الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = -3$

$$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \overset{?}{<} \frac{-3+1}{4}$$
$$-1 + \frac{1}{5} \overset{?}{<} -\frac{2}{4}$$
$$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2} \checkmark$$

اختبر $x = 0$

$$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \overset{?}{<} \frac{0+1}{4}$$
$$0 + \frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$$

اختبر $x = 4$

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \overset{?}{<} \frac{4+1}{4}$$
$$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{5}{4}$$
$$\frac{5}{6} < \frac{5}{4} \checkmark$$

اختبر $x = 8$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \overset{?}{<} \frac{8+1}{4}$$
$$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \overset{?}{<} \frac{27}{12}$$
$$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$$

الجملة صحيحة عندما $x = -3,\ x = 4$ ؛ لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك

(4A $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$

(4B $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

تأكـد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(1 $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$

(2 $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

(3 $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

(4 $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

(5 **مسافة:** قطع وليد مسافة 40 km ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته التي سرعتها 11.5 km/h عندما تكون الريح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الريح زمنًا قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الريح.

a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الريح.

c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح.

مثال 3

(6 **تبليط:** يعمل كلٌّ من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يومًا يحتاجان إليه إذا عملا معًا في تبليط هذا الفناء؟

مثال 4 حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

(7 $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$

(8 $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$

(9 $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(10 $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

(11 $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2-9y-5}$

المثالان 2, 3

12) **بناء:** تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يومًا لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يومًا لإنجاز العمل نفسه، فكم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟

13) **طيران:** سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20h ، واحتاجت إلى 16h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في أثناء الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟

مثال 4

14) حُلّ المتباينة: $\frac{3}{5x} + \frac{1}{6x} > \frac{2}{3}$.

15) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$.

a) **جبريًا:** حُلّ هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟

b) **بيانيًا:** مثّل: $y_2 = \frac{x-1}{x-3}$ ، $y_1 = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$ بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 < x < 5$.

c) **تحليليًا:** ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟

d) **لفظيًا:** استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع (c) ؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلًّا دخيلًا.

16) حُلّ المعادلة: $\frac{2y-2}{y^2-y-12} = \frac{2}{y+3} - \frac{3}{4-y}$ ، وتحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالًا على معادلة نسبية يمكن حلُّها بضرب طرفَي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

18) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$

19) **تبرير:** وضِّح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية.

20) **اكتب:** عند استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$ ، فإن الحاسبة البيانية تعطي خطأ عند القيمتين $x = -2$ و $x = 3$. وضِّح ماذا يعني ذلك؟

تدريب على اختبار

21) ما حل المعادلة: $\frac{36}{a^2+7a+10} = \frac{10}{a+5} - \frac{11}{a+2}$ ؟

A -1 B $-\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D 1

22) ما قيمة x في المعادلة $4 = \left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$ ؟

A -7 B $-\frac{1}{2}$ C $-\frac{1}{7}$ D 7

مراجعة تراكمية

23) حدِّد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيّرًا طرديًا، أم تغيرًا عكسيًا، أم غير ذلك: (الدرس 1-5)

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

24) مثّل الدالّة $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانيًا. (الدرس 1-4)

25) اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: ... ,2, 8, 14, 20 (مهارة سابقة)

توسع **1-6**

معمل الحاسبة البيانية

حلُّ المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

الهدف

أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأحلَّ معادلات ومتباينات نسبية بيانيًا أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحلِّ معادلات نسبية باستعمال التمثيل البياني أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

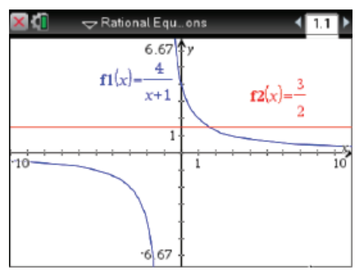
نشاط 1 معادلة نسبية

حُلَّ المعادلة $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2}$.

مثِّل طرفَي المعادلة النسبية بيانيًّا، ثم حدّد نقاط التقاطع.

الخطوة 1 مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثِّل طرفَي المعادلة بيانيًّا كدالّتين مستقلتين، بأن تدخل $\frac{4}{x+1}$ في f1 ، و $\frac{3}{2}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على مفتاح on ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ثم اختر 2 إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر ÷ ctrl ، ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$ واضغط enter ، ثم اضغط المفاتيح ÷ ctrl tab واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط enter

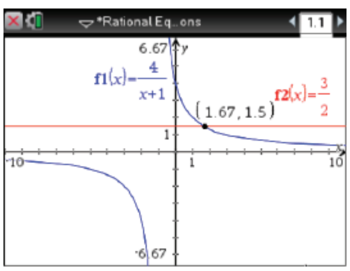


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

الخطوة 2 أوجد نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

تمكِّنك ميزة نقاط التقاطع في قائمة تحليل الرسم البياني من تقدير الزوج المرتَّب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على menu ثم اختر منها 6: تحليل الرسم البياني ، ثم اختر 4: نقاط التقاطع ، وقم بالضغط على أيِّ نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، فتظهر نقطة التقاطع (1.67 , 1.5).

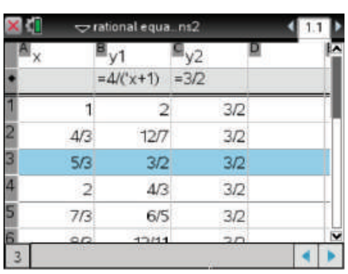


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

أي أن الحل هو $\frac{5}{3} \approx 1.67 = x$.

الخطوة 3 استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحّة حلّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. اعمل جدولًا يبيِّن قيم x، على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كلّ مرّة، وذلك بالضغط على مفتاح on ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات ، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 1 وبزيادة قدرها $\frac{1}{3}$ (لأن الحلّ الذي ستحقّق منه هو $x=\frac{5}{3}$)، واكتب $y_1=\frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، و $y_2=\frac{3}{2}$ في العمود الثالث، ثم اضغط enter واختر مرجع المتغير ، فتظهر الشاشة المجاورة.



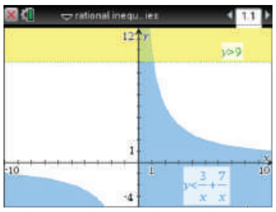
يبيِّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكلِّ تمثيل بياني. فعندما $x=\frac{5}{3}$ ، يكون للدالّتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$ ، وهذا يعني أن حلَّ المعادلة هو $\frac{5}{3} \approx 1.67$.

يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحلِّ متباينات نسبية مستعملًا الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$.

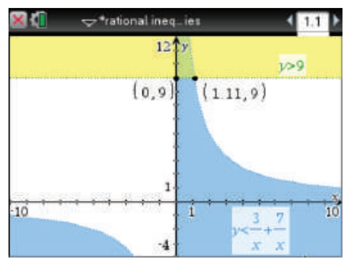
الخطوة 1 مثِّل المتباينتين



[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y < \frac{7}{x} + \frac{3}{x}$، والثانية $y > 9$، ومثِّلهما بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية ثم < del، واكتب $\frac{7}{x} + \frac{3}{x}$ ثم اضغط enter، فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح > del tab، واكتب 9، ثم اضغط enter، ولإظهار الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختر 4: تكبير / تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x , y، ولاحظ أن منطقة حلِّ المتباينتين قد ظُلِّلت باللون الأخضر.

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.



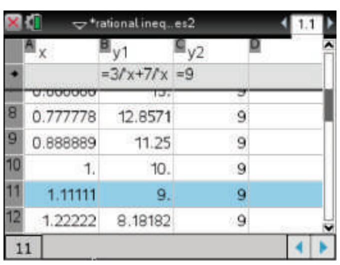
[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

لإيجاد نقطة (نقاط) تقاطع التمثيلين البيانيين اضغط menu ثم 8: الهندسة ومنها 1: النقاط والمستقيمات، واختر منها 3: نقطة (نقاط) التقاطع واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع (1.11 , 9)، كرِّر ذلك مرّة أخرى، واضغط على محور y، والتمثيل البياني لـِ $y = 9$؛ فتظهر نقطة التقاطع (0 , 9) لتتوصَّل إلى أن مجموعة الحلِّ هي $\{x \mid 0 < x < 1.11\}$.

الخطوة 3 استعمل تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. اعمل جدولًا يبيِّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ أو 0.111111 كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ومنها اختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 0 وبزيادة قدرها $\frac{1}{9}$ (لأن الحلّ الذي ستتحقق منه هو $x = 1.11$).

واكتب $y_1 = \frac{7}{x} + \frac{3}{x}$ في العمود الثاني، و$y_2 = 9$ في العمود الثالث.



تنقَّل بالمؤشِّر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $\frac{10}{9} \approx 1.11$، يكون عندها $y_1 > y_2$.
وهذا يؤكد أن مجموعة حلِّ المتباينة هي: $\{x \mid 0 < x < 1.11\}$

تمارين

حُلَّ كلَّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$

2) $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$

3) $\frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$

4) $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$

5) $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$

6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$

7) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$

8) $1 + \frac{5}{x-1} \leq 0$

9) $2 + \frac{1}{x-1} \geq 0$

الفصل 1

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرسان 1-2 , 1-1)

- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسِّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسِّط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية (الدرسان 1-4 , 1-3)

- دالّة المقلوب هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$، و$b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوالّ، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالّة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغيُّر: الطردي، المشترك، العكسي، والمركب (الدرس 1-5)

- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y تغيرًا مشتركًا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث $xy = k$ ، أو $y = \frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$.
- التغيُّر المركب: ويحدث عندما تتغير كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 1-6)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- لحل المتباينات النسبية، حل المعادلات المرتبطة، واستعمل القيم التي تحصل عليها لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات:

- العبارة النسبية ص 12
- الكسر المركب ص 15
- خط التقارب ص 27
- خط التقارب الرأسي ص 27
- خط التقارب الأفقي ص 27
- دالّة المقلوب ص 27
- القطع الزائد ص 27
- الدالّة النسبية ص 34
- نقطة الانفصال ص 36
- التغيُّر الطردي ص 41
- ثابت التغيُّر ص 41
- التغيُّر المشترك ص 42
- التغيُّر العكسي ص 43
- التغيُّر المركب ص 44
- المعادلة النسبية ص 47
- المتباينة النسبية ص 50

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ______________ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان ______________ فإن حاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن ______________ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر ______________ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y=\frac{x}{x+2}$ له ______________ عند $x = -2$.

6) يحدث ______________ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتَي حدود ______________ .

8) تظهر ______________ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة غير معرّفة عندها.

9) يحدث ______________ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

1-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 20–12

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

11) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

12) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

13) $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

14) $\dfrac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

15) **هندسة:** مثلَّث مساحته $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته، ثم اكتبه في أبسط صورة.

مثال 1

بسّط العبارة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$.

$$\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b}{\cancel{3} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot a}$$ حلّل واختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{6b^3}{a}$$ بسّط

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$.

$$\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25}$$ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{\cancel{r}\cancel{(r+5)}}{\cancel{2r}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,3}(r-2)}{\cancel{(r+5)}(r-5)}$$ حلّل واختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{3(r-2)}{r-5}$$ بسّط

1-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 26–21

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

16) $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

17) $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

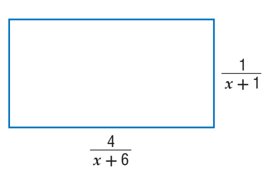
18) $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

19) $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

20) $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

21) $\dfrac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

22) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه، ثم اكتبه في أبسط صورة.



مثال 3

بسّط العبارة: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$.

$$\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$ حلّل المقام a^2-4

$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$ وحّد المقامين

$$= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$ اطرح البسطين

$$= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$$ بسّط

1-3 تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًا ص 32–27

مثّل كلَّ دالّة ممّا يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كلٍّ منها:

23) $f(x) = \frac{10}{x}$

24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

29) **تشجير:** يقوم طلاب الصف الثاني الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالّة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

مثال 4

مثّل الدالّة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًا، وحدِّد مجالها ومداها.

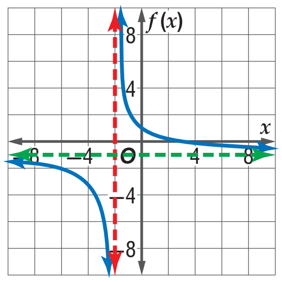
بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالّة الأم رأسيًا.

ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين. وَيوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

وَ $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى أسفل بمقدار وحدة. وَ يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$



1-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًا ص 39–34

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$

31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$

مثّل كلَّ دالّة ممّا يأتي بيانيًا:

33) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

35) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$

37) **مبيعات:** يبيع عليٌّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وباع لكلٍّ منها اشتراكًا. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالّة $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.

a) مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

b) ما القيم المنطقية لكلٍّ من المجال والمدى في سياق المسألة؟

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالّة غير معرّفة عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$.

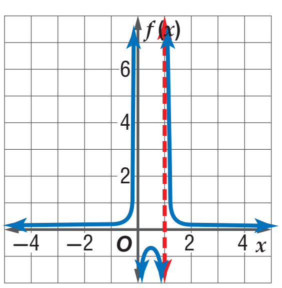
وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$، فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6

مثّل الدالّة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.

الدالّة غير معرفة عند $x = 0$، وعند $x = 1$.

وبما أن الدالّة في أبسط صورة، فإن $x = 0$ ، و $x = 1$ خطّا تقارب رأسيّان للدالّة.



ارسم الخطين والدالّة بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

دليل الدراسة والمراجعة

1-5 دوالّ التغيُّر ص 41-46

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b، وكانت $a = 27$ عندما $b = 18$ فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$.

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$

41) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

42) إذا كانت x تتغيّر تغيّرًا طرديًّا مع y وعكسيًّا مع r، وكانت $y = 6$، عندما $r = 4$ و $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 8$ و $r = 10$.

43) **مهن:** يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h، فكم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$x_1 y_1 = x_2 y_2$ تناسب عكسي

$24(-8) = x_2 \times 15$ ، $x_1 = 24$, $y_1 = -8$, $y_2 = 15$

$-192 = 15x_2$ بسّط

$-12\frac{4}{5} = x_2$ اقسم كلًّا من الطرفين على 15

عندما تكون $y = 15$، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 47-52

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

49) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

50) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$

51) **زراعة:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليٌّ زراعتها في 4 h. فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$، وتحقق من صحة حلّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2-2 = 0 \checkmark$$

اختبار الفصل

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\dfrac{r^2+rt}{2r} \div \dfrac{r+t}{16r^2}$

2) $\dfrac{m^2-4}{3m^2} \cdot \dfrac{6m}{2-m}$

3) $\dfrac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \dfrac{m-2}{n+3}$

4) $\dfrac{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\dfrac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

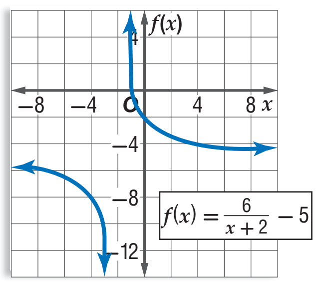
5) $\dfrac{x+4}{6x+3} + \dfrac{1}{2x+1}$

6) $\dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{3}{2x+2}$

7) $\dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{2y^2}$

8) $\dfrac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) حدِّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالّة الممثلة بيانيًّا أدناه.



10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالّة النسبية $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ ؟

A $x = -2$

B $x = -1$

C $x = 1$

D $x = 2$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

11) $f(x) = -\dfrac{8}{x} - 9$

12) $f(x) = \dfrac{2}{x+4}$

13) $f(x) = \dfrac{3}{x-1} + 8$

14) $f(x) = \dfrac{5x}{x+1}$

15) $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

16) $f(x) = \dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

17) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$.

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

19) $\dfrac{-1}{x+4} = 6 - \dfrac{x}{x+4}$

20) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{m+3} + \dfrac{8}{21}$

21) $7 + \dfrac{2}{x} < -\dfrac{5}{x}$

22) $r + \dfrac{6}{r} < 5$

23) $\dfrac{6}{7} - \dfrac{3}{2m-1} \geq \dfrac{11}{7}$

24) $\dfrac{r+2}{3r} = \dfrac{r+4}{r-2} - \dfrac{2}{3}$

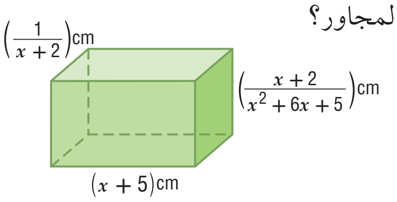
25) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

26) إذا كانت m تتغيّر طرديًّا مع n، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

27) إذا كانت r تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع s و t. وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$، و $t = -5$ ، فأوجد قيمة s عندما $r = 7$، و $t = 2.5$.

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًّا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h ، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟

29) **هندسة:** ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟



الإعداد للاختبارات المعيارية

التخمين والتحقق

من المهم جدًّا أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختيار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوّم معقولية كلٍّ منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة،

واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- **معادلات:** إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوِّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد ممَّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثمّ حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمّن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

ما حل المعادلة $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟

A -1

B 1

C 5

D 7

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلًّا منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

خمن: -1	تحقق: $\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-9}$ ✗ $-\frac{5}{2}\neq -1$
خمن: 1	تحقق: $\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-9}$ ✗ $-2\neq -1$
خمن: 5	تحقق: $\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-9}$ ✓ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x = 5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟

A $\frac{1}{10}$ **B** $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{1}{2}$

2) **أعمار:** مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عُمر محمد يزيد على مثلَي عُمر محمود بسنة واحدة، وعُمر علي أكبر من عُمر محمد بثلاث سنوات، فما عُمر محمد؟

A 7   **B** 15

C 14   **D** 18

3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟

A -5 **B** 4

C 3 أو 2   **D** 2 أو -5

4) **مبيعات:** تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر. فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟

A 10 ريالات   **B** 15 ريالًا

C 13 ريالًا   **D** 20 ريالًا

الفصل 1

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي :

1) **فنادق:** تتغيّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًا مع عدد أيام استئجارها كما هو موضَّح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أيُّ المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

2) في أيِّ اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أيٌّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالّة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركّب $\dfrac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$ تساوي:

A 77

B 45

C 13

D −77

6) ما حل المعادلة: $\frac{8}{x^2-9} = \frac{4}{x+3} - \frac{2}{x-3}$ ؟

A −13

B $\frac{7}{3}$

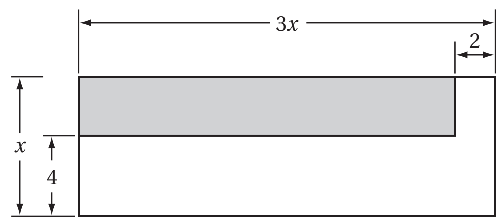
C 5

D 7

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.



8) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y = 12$ عندما $x = -3$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 16$.

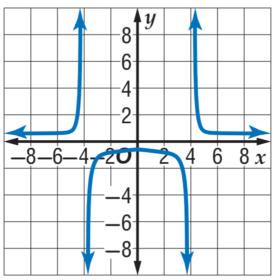
9) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y وعكسيًّا مع z ، وكانت $z = 26$ عندما $x = 8$ و $y = 13$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 8$ و $y = -6$.

10) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 5$.

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

11) استعمل التمثيل البياني للدالّة النسبية المجاور، وأوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالّة النسبية.



12) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالّتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(x) = x^2$
$g(x) = x - 5$

b) $f(x) = 6 - x^2$
$g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	1-5	1-3	1-3	1-1	مهارة سابقة	1-6	مهارة سابقة	1-5	1-5	1-5	1-4	مهارة سابقة

الفصل 2

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست الأنماط الجبرية، والمتتابعات الحسابية بوصفها دوالّ خطية.

والآن:

- أستعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدَّين.
- أبرهن جملًا رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

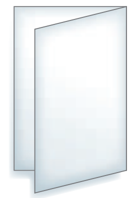
لماذا؟

بذور: تظهر المتتابعات بأشكال شتَّى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات، فمثلًا تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تبّاع الشمس، بحيث يتكوَّن الشكل الحلزوني المعروف بدوّامة فيبوناشي.

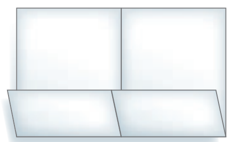
المطويات منظِّم أفكار

المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئًا بورقة واحدة A4.

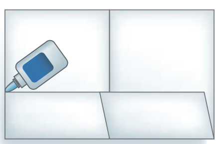
1. **اطوِ** الورقة من المنتصف كما في الشكل.



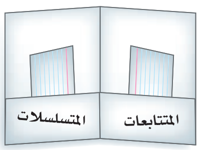
2. **أعد** الورقة إلى وضعها ثم اطوِ الجانب الأطول بمقدار 5 cm لعمل جيب كما في الشكل.



3. **ألصق** الطرفين لعمل الجيب.



4. **ضع** عنوانًا لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



التهيئة للفصل الثاني

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة"؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية: (تستعمل مع الدروس 2-1 إلى 2-3)

1) $-6 = 7x + 78$

2) $768 = 3x^4$

3) $23 - 5x = 8$

4) $2x^3 + 4 = -50$

5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟

مثّل كلًّا من الدوالّ الآتية بيانيًّا: (تستعمل مع الدروس 2-1 إلى 2-4)

6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

8) $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$

9) $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$

10) **حضانة** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهريًّا. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضمُّ c طفلًا. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلًا؟

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الآتية عند قيم المتغيّرات المُعطَاة. (تستعمل مع الدروس 2-1 إلى 2-4)

11) $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$

12) $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$

13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$

14) $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

مراجعة سريعة

مثال 1

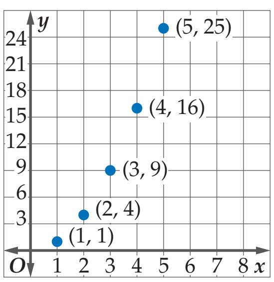
حُلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$25 = 3x^3 + 400$	المعادلة الأصلية
$-375 = 3x^3$	اطرح 400 من الطرفين
$-125 = x^3$	اقسم الطرفين على 3
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$	خُذ الجذر التكعيبي للطرفين
$-5 = x$	بسّط

مثال 2

مثّل الدالّة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانيًّا. ثم حدّد كلًّا من المجال والمدى.

مجال الدالّة هو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر المستقل (x). لذلك يكون مجال الدالّة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
أمّا مدى الدالّة فهو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر التابع (y) إذن مدى الدالّة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.



مثال 3

إذا كانت $x = -2, y = -3$، فأوجد قيمة: $2 \cdot 3^{x+y}$

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$	عوّض
$= 2 \cdot 3^{-5}$	بسّط
$= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243}$	تعريف القوّة السالبة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-1 المتتابعات بوصفها دوالّ
Sequences as Functions

فيما سبق:

درست الدوالّ الخطية والدوالّ الأسيّة.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرّف المتتابعة الحسابية باعتبارها دالّة خطية.
- أتعرّف المتتابعة الهندسية باعتبارها دالّة أُسّية.

المفردات:

المتتابعة
sequence

الحدّ
term

المتتابعة المنتهية
finite sequence

المتتابعة غير المنتهية
infinite sequence

المتابعة الحسابية
arithmetic sequence

أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك)
common difference

المتتابعة الهندسية
geometric sequence

أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة)
common ratio

لماذا؟

خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كلِّ صفٍّ كما يأتي: مشارك واحد في الصفِّ الأول، وثلاثة في الصفِّ الثاني، وخمسة في الصفِّ الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: **المتتابعة** مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمطٍ محدّدٍ أو ترتيب معين، ويُسمّى كلُّ عدد في المتتابعة **حدًّا**. ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل: 6 ,4 ,2 ,0 ,2−، أو **غير منتهية**، حيث تستمر إلى مالانهاية مثل ... ,3 ,2 ,1 ,0. ويُرمز للحدّ الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحدّ الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

مفهوم أساسي — **المتتابعات بوصفها دوالّ** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالّة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

الرموز: عناصر المجال: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$ ترتيب الحدّ

عناصر المدى: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n$ حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
3, 6, 9, 12, 15	3, 6, 9, 12, 15, ...
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كلُّ حدّ في **المتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرة. وتُسمَّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: 15 ,12 ,9 ,6 ,3 هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كلُّ حدٍّ على الحدّ الذي يسبقه بمقدار 3 .

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$$

مثال 1 تحديد المتتابعة الحسابية

بيّن ما إذا كانت كلّ من المتتابعتين الآتيتين حسابية أم لا:

a) 5, −6, −17, −28, ...

$$5 \xrightarrow{-11} -6 \xrightarrow{-11} -17 \xrightarrow{-11} -28$$

الفرق الثابت هو 11−

المتتابعة حسابية

b) −4, 12, 28, 42, ...

$$-4 \xrightarrow{+16} 12 \xrightarrow{+16} 28 \xrightarrow{+14} 42$$

الفرق غير ثابت

المتتابعة ليست حسابية

تحقق من فهمك

1A) 7, 12, 16, 20, ...

1B) −6, 3, 12, 21, ...

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها.

مثال 2 تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًا

في المتتابعة الحسابية: ... ,10 ,14 ,18

a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة، اطرح أيَّ حدّ من حدود المتتابعة من الحدّ السابق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $-4 = 14 - 10$. ويُمثِّل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، أضف -4 للحدّ الأخير المُعطَى.

وهكذا أضف -4 لكل حدّ من الحدود التالية.

$$10 \xrightarrow{+(-4)} 6 \xrightarrow{+(-4)} 2 \xrightarrow{+(-4)} -2 \xrightarrow{+(-4)} -6$$

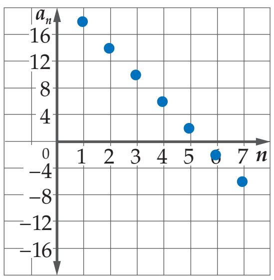
إذن الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: $6, 2, -2, -6$

b) مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$

ومدى المتتابعة هو المجموعة: $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, ...\}$

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا بالشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... ,4 ,11 ,18

ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الحسابية

هو الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين (الحدّ − سابقه) ابتداءً من الحدّ الثاني .

لاحظ أن النقاط التي تُمثِّل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالّة خطية مجالها أو متغيّرها المستقل هو رقم الحدّ n، ومداها أو متغيّرها التابع هو الحدّ a_n، والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

المهرجانات الكشفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم: بما أن الفرق الثابت بين كلِّ حدّ والحدّ السابق له هو 2، فإن أساس المتتابعة هو 2.

خطّط: اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افترض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$, $m = 2$. ثم حُلّ المعادلة عندما $x = 14$

حُلّ:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2 , (x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب
$y = 2x - 1$	اجمع 5 إلى كلٍّ من طرفَي المعادلة
$y = 2(14) - 1$	عوِّض 14 مكان x
$y = 28 - 1 = 27$	بسِّط

إذن عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركًا.

تحقَّق: يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صفٍّ، بدءًا من الصفِّ الأول حتى نصل إلى الصفِّ الرابع عشر.

تحقق من فهمك

3) نقود: ادّخر عامل في يوم ما 20 ريالًا من أجره اليومي، فإذا علمت أنه يدّخر في كل يوم 5 ريالات زيادة على اليوم السابق، فكم ريالًا يدَّخر في اليوم الثاني عشر؟

الربط بالحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظّمون بعمل ترتيبات خاصّة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

المتتابعة الهندسية: **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيِّ حدٍّ من حدودها بضرب الحدّ السابق له مباشرة في عدد ثابت يُسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أيْ أنَّ كلَّ حدّ في المتتابعة هو 4 أمثال الحدّ السابق له مباشرة.

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

تنبيه!

النسب

إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحدّ السابق له، فأوجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

هو النسبة بين كل حدَين متتاليين، الحدّ ÷ سابقه ابتداءً من الحدّ الثاني.

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد النسبة بين كل حدّين متتاليين.

$$\frac{6}{-2} = -3 \quad , \quad \frac{-18}{6} = -3 \quad , \quad \frac{54}{-18} = -3$$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

$$\frac{16}{8} = 2 \quad , \quad \frac{24}{16} = 1.5$$

بما أن النسبتين غير متساويتين؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تحقق من فهمك

4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \ldots$

4B) $1, 3, 7, 15, \ldots$

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانيًا

المتتابعة: $\ldots, 2, 8, 32$ متتابعة هندسية.

a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، اضرب الحدّ السابق في العدد $\frac{1}{4}$

وهكذا بضرب كلِّ حدّ في العدد $\frac{1}{4}$ نحصل على الحدود الآتية.

$$2 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{8} \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{1}{32}$$

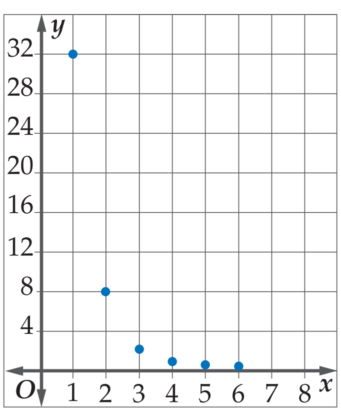
إذن الحدود الثلاثة التالية هي: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

b) مثّل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

مدى المتتابعة هو: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا كما في الشكل المجاور.

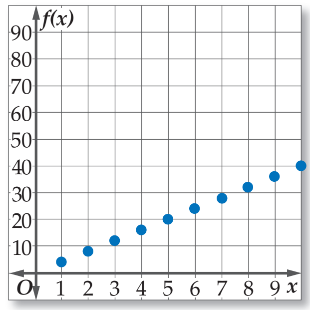


تحقق من فهمك

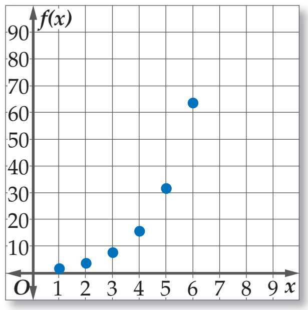
5) أوجد الحدّين التاليين في المتتابعة الهندسية: $\ldots, 7, 21, 63$، ثم مثّل الحدود الخمسة الأولى بيانيًّا.

تفحَّص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّيٌّ وليس خطّيًّا كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بوصفها دالّة أسّية في الصورة $f(x) = r^x$، حيث r أساس المتتابعة الهندسية، و $r > 0$ و $r \neq 1$

حسابية



هندسية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

ويمكنك استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6 تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

a) $16, 24, 36, 54, \ldots$

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$54 - 36 = 18 \qquad 36 - 24 = 12$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2} \qquad \frac{36}{24} = \frac{3}{2} \qquad \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

بما أن النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

b) $1, 4, 9, 16, \ldots$

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$16 - 9 = 7 \qquad 9 - 4 = 5$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7} \qquad \frac{9}{4} = 2.25$ ✗

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ليس عددًا ثابتًا، وكذلك النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ليست ثابتة أيضًا؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

c) $23, 17, 11, 5, \ldots$

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$5 - 11 = -6 \qquad 11 - 17 = -6 \qquad 17 - 23 = -6$ ✓

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

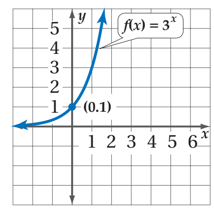
✓ تحقق من فهمك

6A) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B)** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C)** $-4, 4, 5, -5, \ldots$

إرشادات للدراسة

الدالّة الأسّية

هي الدالّة التي تكون على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0, b \neq 1$، وهي متصلة ومتباينة، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خطُّ تقارب أفقي هو المحور x، ويمرّ منحناها بالنقطة $(0, 1)$ دائمًا، فمثلًا $f(x) = 3^x$ دالّة أسّيّة تمثيلها البياني هو



تأكد

مثال 1 بيّن ما إذا كانت كلّ متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

1) $8, -2, -12, -22, \ldots$
2) $-19, -12, -5, 2, 9$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

3) $6, 18, 30, \ldots$
4) $15, 6, -3, \ldots$

مثال 3 5) **توفير:** يوفِّر سعيد 250 ريالًا شهريًّا، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:

a) المبلغ الذي سيصبح معه بعد مرور 8 أشهُر.

b) الوقت الذي يحتاج إليه ليصبح معه 7250 ريالًا، إذا استمر في التوفير بالطريقة ذاتها.

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

6) $4, 12, 36, 108, \ldots$
7) $7, 14, 21, 28, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

8) $250, 50, 10, 2, \ldots$
9) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

مثال 6 حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

10) $5, 1, 7, 3, 9, \ldots$
11) $200, -100, 50, -25, \ldots$
12) $12, 16, 20, 24, \ldots$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بيّن ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

13) $-9, -3, 0, 3, 9, \ldots$
14) $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

15) $-5, -11, -17, -23, \ldots$
16) $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$
17) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots$

مثال 3 18) **تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كلِّ صفٍّ تالٍ يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا يوجد في الصف الأخير؟

19) **تمارين قوة:** يقوم عليٌّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويُخطّط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية مدّة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدّة الاستعمال بمعدّل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًّا.

a) ما مدّة استعمال عليٍّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟

b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدّة ساعة أو أكثر؟

c) هل يُعدّ استمرار عليٍّ في هذا النمط إلى مالا نهاية منطقيًّا؟ لماذا؟

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

20) $21, 14, 7, \ldots$
21) $-27, 18, -12, \ldots$
22) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

23) $81, 108, 144, \ldots$
24) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$
25) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

مثال 6 حدد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

26) $3, 12, 27, 48, \ldots$
27) $1, -2, -5, -8, \ldots$

28) $12, 36, 108, 324, \ldots$

29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

31) $6, 9, 14, 21, \ldots$

32) **قراءة:** أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضمُّ 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًّا، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًّا؟

33) **نقص القيمة:** تنقص قيمة سيَّارة ماجد بمعدل 15% سنويًّا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقرّبًا الجواب إلى أقرب ريال؟

الربط بالحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدَّل 15% إلى 20% سنويًّا؛ وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

34) **طيُّ الأوراق:** عند طيِّ ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكُها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm، وأمكن طيُّها 37 مرَّة، فكم يصبح سمكها؟

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **تحدٍّ:** إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي -42، فما هذه الحدود؟

36) **مسألة مفتوحة:** أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كلٌّ منها كما يأتي $\ldots, 9, 3$. بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة لا حسابية ولا هندسية.

37) **تبرير:** إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$؟

38) **اكتب:** صِفْ ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلَي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

39) **إجابة قصيرة:** صالة مستطيلة الشكل بُعدَاها 13 مترًا، و11 مترًا. أردنا وضع سجادة تغطِّيها كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالًا.

40) ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية التالية:

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$ ؟

A $\frac{11}{8}$

B $\frac{27}{16}$

C $\frac{9}{4}$

D $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

41) حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 6-1)

أوجد معادلة المستقيم في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

42) المارّ بالنقطة $(6, 4)$، وميله 0.5 .

43) المارّ بالنقطتين $(1, 3)$, $(8, -\frac{1}{2})$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فيما سبق:

درست تمييز المتتابعة الحسابية. (الدرس 2-1)

والآن:

- أجد حدود متتابعة حسابية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا حسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:

الأوساط الحسابية arithmetic means

المتسلسلة series

المتسلسلة الحسابية arithmetic series

المجموع الجزئي partial sum

رمز المجموع sigma notation

لماذا؟

في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ، مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرِّ العصور.

لقد حلَّ جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية: لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 – 6؛ لإيجاد قيمة حدّ معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أيّ حدّ من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ التي أساسها d يكون:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل والنقطة}$$

$$(a_n - a_1) = d(n - 1) \quad (x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \text{اجمع } a_1 \text{ للطرفين}$$

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حدّ من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحدّ الأول والأساس.

مفهوم أساسي — الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

أضف إلى مطويتك

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1، وأساسها d، حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستشتق هذه الصيغة في السؤال (58)

مثال 1 — إيجاد حدّ معيَّن في متتابعة حسابية

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: $9, 16, 23, 30, \dots$

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

الفرق بين أيّ حدّين متتاليين: $16 - 9 = 7$

إذن $d = 7$

الخطوة 2: أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية}$$

$$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7) \quad a_1 = 9, d = 7, n = 12$$

$$= 9 + 77 = 86 \quad \text{بسِّط}$$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(1A a_n علمًا بأن: $a_1 = -4, d = 6, n = 9$

(1B a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15, d = -8$

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة الحدّ النوني لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $5, -13, -31, \ldots$

$d = -13 - 5 = -18$ والحدّ الأول 5

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$	$a_1 = 5$ و $d = -18$
$a_n = -18n + 23$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

b) $a_5 = 19,\ d = 6$

الخطوة 1: أوجد قيمة a_1

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$	$a_5 = 19,\ n = 5,\ d = 6$
$-5 = a_1$	اضرب، ثم اطرح 24 من الطرفين

الخطوة 2: كتابة الصيغة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة
$a_n = -5 + (n-1)(6)$	$a_1 = -5$ و $d = 6$
$a_n = 6n - 11$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

✓ تحقق من فهمك

2A) $12, 3, -6, \ldots$

2B) $a_6 = 12,\ d = 8$

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدّان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدّين **أوساطًا حسابية**، ويمكنك استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $-8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 22$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحدّ الأول والحدّ الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$22 = -8 + (6-1)d$	$a_1 = -8,\ a_6 = 22,\ n = 6$
$30 = 5d$	أضف 8 إلى الطرفين، ثم بسّط
$6 = d$	اقسم الطرفين على 5

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+6} 22$$

إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

✓ تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $-18, 36$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحلّ

تحقّق من صحة الحلّ، باستعمال صيغة الحدّ النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقّق دائمًا من أن صيغة الحدّ النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي هو معدّل عددين أو أكثر. الوسط الحسابي بين العددين a, b يساوي $\frac{a+b}{2}$

الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين أيّ حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

المتسلسلات الحسابية: يمكنك الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة؛ لذا **فالمتسلسلة الحسابية** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي: المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n, n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1, d, n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لابد من إيجاد إحدى القيم a_1, a_n, n، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحدّ النوني.

إرشادات للدراسة

صيغتا المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بالصيغة العامة؛ لأنه تم التوصل إليها اعتمادًا على تعريف المتتابعة الحسابية، وباستعمال حدودها بشكل عام، بينما سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ بالصيغة البديلة؛ لأنها تشتق من الصيغة العامة، ويمكن استعمالها بديلًا عن الصيغة العامة.

مثال 4 استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \dots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12,\ a_n = 180,\ d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولًا كي نجد المجموع.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$180 = 12 + (n-1)(7)$	$a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$
$168 = 7n - 7$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسِّط
$25 = n$	حُلّ المعادلة

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n.

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	صيغة المجموع
$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$	$n = 25, a_1 = 12, d = 7$
$S_{25} = 12.5(192) = 2400$	بسِّط

✓ **تحقق من فهمك**

4A) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

4B) $n = 16, a_n = 240, d = 8$

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتتابعة الحسابية.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7, a_n = 79, S_n = 430$

الخطوة 1: أوجد قيمة n.

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$430 = \frac{n}{2}(7 + 79)$	$S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$
$430 = \frac{n}{2}(86)$	اجمع
$430 = n(43)$	بسِّط
$10 = n$	اقسم طرفي المعادلة على 43

الخطوة 2: أوجد قيمة d .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية
$79 = 7 + (10-1)d$	$a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
$72 = 9d$	اطرح 7 من طرفي المعادلة
$8 = d$	اقسم طرفي المعادلة على 9

الخطوة 3: استعمل d لحساب كلٍّ من a_2 , a_3 .

$a_2 = 7 + 8 = 15$ ، $a_3 = 15 + 8 = 23$

إذن الحدود الثلاثة الأولى هي $7, 15, 23$

تحقق من فهمك

5A) $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$

5B) $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي — رمز المجموع

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

صيغة حدود المتسلسلة: $f(k)$ ؛ أول قيمة لـ k : $k=1$ ؛ آخر قيمة لـ k : n

مثال: $\sum_{k=1}^{12} (4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$

$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع
يقرأ الرمز $\sum$ "سيجما"، وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=4}^{18} (6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كلَّ حدّ يزيد على الحدّ السابق له بمقدار 6،
ويوجد فيها 15 حدًّا $(n = 15)$؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$a_1 = 6(4) - 1 = 23$ ، $a_n = 6(18) - 1 = 107$

أوجد المجموع

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_{15} = \frac{15}{2}(23 + 107)$	$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$
$S_{15} = \frac{15}{2}(130) = 975$	بسّط

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو **C** .

إرشادات للدراسة

عدد الحدود
المتسلسلة المكتوبة باستعمال رمز المجموع $\sum_{k=a}^{b} f(k)$ عدد حدودها يساوي $b - a + 1$

تحقق من فهمك

6) أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{m=9}^{21} (5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

تأكـد

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(1 a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

(2 a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني لكلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(3 $13, 19, 25, \ldots$

(4 $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

(5 $6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 42$

(6 $-4, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

(7 أول 50 عددًا طبيعيًّا

(8 $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

(9 $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$

(10 $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(11 $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

(12 $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6 (13 **اختيار من متعدد :** أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45

B 78

C 342

D 410

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

(14 a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$

(15 a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

(16 a_{15} في المتتابعة $-5, -12, -19, \ldots$

(17 a_{24} في المتتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلّ متتابعة حسابية فيما يأتي:

(18 $24, 35, 46, \ldots$

(19 $a_5 = 1.5, d = 4.5$

(20 $9, 2, -5, \ldots$

(21 $a_6 = 22, d = 9$

(22 $a_8 = -8, \text{d} = -2$

(23 $-12, -17, -22, \ldots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

(24 $24, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -1$

(25 $-6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 49$

(26 $-28, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 7$

(27 $84, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 39$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

30) $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$

31) $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$

32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$

33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$

34) **مسابقات ثقافية:** في إحدى المسابقات الثقافية تم تخصيص جوائز تصاعدية للإجابة الصحيحة عن أسئلة المسابقة، فخُصِّص للسؤال الأول 100 ريال، وتزيد قيمة الجائزة 50 ريالًا للسؤال التالي، وهكذا. إذا شارك سعد في المسابقة، وأجاب عن 11 سؤالًا بصورة صحيحة، فما مجموع مبلغ الجائزة الذي يستحقُّه؟

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$

36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$

37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$

38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

مثال 6 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

39) $\sum_{k=1}^{16}(4k-2)$

40) $\sum_{k=4}^{13}(4k+1)$

41) $\sum_{k=5}^{16}(2k+6)$

42) $\sum_{k=0}^{12}(-3k+2)$

الربط بالحياة

يجب على الإنسان أن يكتب عقدًا بينه وبين من يقرضه المال، عملًا بقوله تعالى في سورة البقرة: ﴿يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيۡنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٖ مُّسَمّٗى فَٱكۡتُبُوهُۚ ... ﴾ ﴿٢٨٢﴾

43) **قرض حسن:** اقترض عليٌّ مبلغًا من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسَّطًا كما يأتي: القسط الأول 50 ريالًا، وكل قسط تالٍ يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالًا. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟

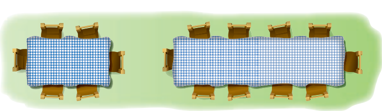
استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحدّ النوني لكل متتابعة حسابية:

44) الحدّ رقم 100 في المتتابعة يساوي 245، وأساس المتتابعة يساوي 13 .

45) الحدّ الحادي عشر في المتتابعة يساوي 78، وأساس المتتابعة يساوي 9− .

46) الحدّ الخامس والعشرون في المتتابعة يساوي 121، والحدّ الثمانون يساوي 506 .

47) **تنظيم:** تُصفّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورةً لتُشكّل طاولة كبيرة. ويُبيّنُ الشكل المجاور عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.



a) ارسم شكلًا يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولات في كلٍّ من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كلَّ مرَّة).

b) اكتب معادلة تُمثّل الحدّ النوني في هذا النمط.

c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضّح إجابتك.

48) **جاذبية:** عندما يسقط جسم سقوطًا حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يقطع مسافة 16 قدمًا في الثانية الأولى، و48 قدمًا إضافية في الثانية الثانية، و80 قدمًا إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟

49) **دخل سنوي:** إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة في السنة الأولى 92000 ريال، ويزيد سنويًّا بمقدار 16000 ريال، ففي أيّ سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟

50) **رياضة:** خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأول، ومن ثَمَّ يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف ميل أسبوعيًّا.

a) اكتب معادلة للحدّ النوني لهذه المتابعة.

b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أيِّ أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟

c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ وضّح إجابتك.

الربط بالحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

51) **تمثيلات متعددة:** معتبرًا $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$ أجب عما يأتي:

a) **جدوليًّا:** اعمل جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \leq k \leq 10$.

b) **بيانيًّا:** مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع **a**، وذلك بتمثيل النقاط (k, S_k) .

c) **بيانيًّا:** مثّل الدالّة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 \leq x \leq 10$.

d) **لفظيًّا:** ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

e) **تحليليًّا:** ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالّة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

f) **جبريًّا:** أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون فيها التمثيل البياني للمجاميع الجزئية (k, S_k) هو نفسه للدالّة $g(x) = x^2 + 8x$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

52) $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

53) $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تبرير:** إذا كان a هو الحدّ الثالث في متتابعة حسابية، وb هو الحدّ الخامس، وc هو الحدّ الحادي عشر، فعبّر عن c بدلالة a, b .

55) **تحدٍّ:** يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فأوجد الوسط الحسابي للعددين a, b.

56) **مسألة مفتوحة:** اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود، ومجموعها 324 .

57) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

58) **صيغ:** اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية.

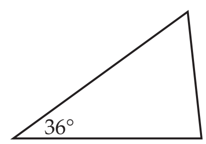
59) **صيغ:** اشتقّ قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1.

60) **صيغ:** اشتقّ الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

61) **تحدّ:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟" ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت).

تدريب على اختبار

62) تُشكّل قياسات زوايا المثلّث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى °36، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A 75°

B 84°

C 90°

D 97°

63) العبارة $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$

B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$

C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$

D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

مراجعة تراكمية

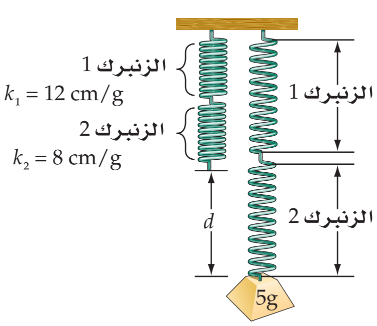
حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية أم لا. أجب "بنعم" أو "لا" : (الدرس 1-2)

64) $-6, 4, 14, 24, \ldots$

65) $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

66) $10, 8, 5, 1, \ldots$

67) **فيزياء:** ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلّقة فيه. ويعبَّر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$ ، حيث d المسافة، و m الكتلة، و k ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يُحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 1-6)



a) إذا وُصِل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول $12\,cm/g$، وثابت الزنبرك الثاني $8\,cm/g$ ، فأوجد ثابت الزنبرك الناتج.

b) إذا عُلّقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

68) $2 \cdot 3^6$

69) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

70) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فيما سبق:

درست تمييز المتتابعة الهندسية. (الدرس 1-2)

والآن:

- أجد حدود متتابعة هندسية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا هندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:

الأوساط الهندسية
geometric means

المتسلسلة الهندسية
geometric series

لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت، وجد "أحمد" موضوعًا عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كلٌّ واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كلٌّ من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدُدٍ. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحدِّ النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ من حدودها.

مفهوم أساسي — الحد النوني في المتتابعة الهندسية

أضف إلى مطويتك

تُستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 ، وأساسها r ، حيث n عدد طبيعي:

$$a_n = a_1 r^{\,n-1}$$

ستشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (39)

مثال 1 من واقع الحياة — إيجاد الحدّ النوني في متتابعة هندسية

بريد إلكتروني: في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسَلة في المرحلة الثامنة؟

افهم: تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كلُّ شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كلَّ شخص استلم رسالة واحدة).

خطط: يُشكّل عدد الرسائل المرسلة في كلِّ مرحلة متتابعة هندسية أساسها 5 = r، لذا استعمل صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

حُلّ:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية

$a_8 = 5(5)^{8-1}$ $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$a_8 = 5(78125) = 390625$ $5^7 = 78125$

وعليه فإن عدد الرسائل المرسلة في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقّق: اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.

5 , 25 , 125 , 625 , 3125 , 15625 , 78125 , 390625

تحقق من فهمك

1) **أمطار:** في أثناء هطول الأمطار ونزولها من أعلَى تلّةٍ إلى أحد الوديان، صنعت الأمطار مجرًى لها في الوادي طوله 40 in ، إذا كان هذا المجرى يتسع كلّ يومٍ ثلاثة أمثال اليوم السابق له، فكم سيبلغ اتساع المجرى في اليوم الخامس في حالة استمرار هطول الأمطار بهذا المنوال؟

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحدّ النوني لها.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني لمتتابعة الهندسية

اكتب صيغة الحدّ النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

a) $0.5, 2, 8, 32, \ldots$

الحدّ الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

$a_n = a_1 r^{n-1}$ — الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية

$a_n = 0.5(4)^{n-1}$ — $a_1 = 0.5, r = 4$

b) $a_4 = 5, r = 6$

الخطوة 1: إيجاد a_1

$a_n = a_1 r^{n-1}$ — الحد النوني في المتتابعة الهندسية

$5 = a_1(6^{4-1})$ — $a_n = 5, r = 6, n = 4$

$\frac{5}{216} = a_1$ — أوجد قيمة 6^3 ثم اقسم عليها

الخطوة 2: كتابة الصيغة

$a_n = a_1 r^{n-1}$ — الحد النوني في المتتابعة الهندسية

$a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$ — $a_1 = \frac{5}{216}, r = 6$

تحقق من فهمك

2A) $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$ **2B)** $a_3 = 16, r = 4$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدَّين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحدِّ الأول والحدِّ الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $3 + 2 = 5$، ولذلك يكون $n = 5$.

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$a_n = a_1 r^{n-1}$ — الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية

$1250 = 2r^{5-1}$ — $a_n = 1250, a_1 = 2, n = 5$

$\pm 5 = r$ — اقسم الطرفين على 2، ثم أوجد الجذر الرابع

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$ أو $2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$

إذن الأوساط الهندسية هي: $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

تحقق من فهمك

3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 0.5, 512

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

يمكن بسهولة استنتاج قاعدة تساعد على إيجاد أساس المتتابعة الهندسية (r) إذا عُلم حدَّان من حدودها a_n ، a_m

$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$

المتسلسلات الهندسية: يمكنك الحصول على المتسلسلة الهندسية بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية. ويُرمز لمجموع أول n حدًّا في المتسلسلة بالرمز S_n. ويمكنك إيجاده باستعمال أيٍّ من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

مثال 4 من واقع الحياة إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

بريد إلكتروني: بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المُرسَلة حتى نهاية المرحلة الثامنة؟

أُرسلت خمس رسائل إلكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.

إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5(1-5^8)}{1-5}$ $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_8 = 488280$ بسّط

إذن مجموع الرسائل المرسَلة حتى 8 مراحل هو: 488280 .

تحقق من فهمك

4) **بكتيريا:** ينمو أحد أنواع البكتيريا في وسط غذائي، بحيث ينقسم إلى جزأين ثم إلى أربعة، ثم إلى ثمانية وهكذا. إذا بدأ مجتمع هذا النوع من البكتيريا بعدد 10، فما مجموع البكتيريا فيه بعد 8 انقسامات؟

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكنك استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

تنبيه!

رمز المجموع

لاحظ في المثال 5 أنه طُلب إيجاد المجموع من الحدّ الثالث إلى الحدّ العاشر.

مثال 5 المجموع باستعمال رمز المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

لاحظ أن المتسلسلة المُعطاة هندسية؛ لأن صيغة حدودها $4\ (2)^{k-1}$ مُعطاة بدالّة أُسيّة، إذن $r = 2$ ،

والآن أوجد قيمة كلٍّ من a_1, n ، ولإيجاد الحدّ الأول عوِّض العدد 3 مكان k، ويستخرج كما يأتي:

$a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 16$ ، وأساس المتسلسلة الهندسية هو r ، حيث $r = 2$.

وعدد الحدود هو: $10 - 3 + 1 = 8$ إذن $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{16(1-2^8)}{1-2}$ $a_1 = 16, r = 2, n = 8$

$= 4080$ استعمل الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

5A) $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

5B) $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

يمكنك استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حدٍّ معيَّن من حدود المتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحدّ الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$ $S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$

$13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$ استعمل خاصية التوزيع

$13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$ اطرح

$13116 = 1093a_1$ بسّط

$12 = a_1$ اقسم الطرفين على 1093

تحقق من فهمك

6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = -26240,\ n = 8,\ r = -3$

تأكد

مثال 1

1) **فيروسات:** اخترق فيروس حاسوبًا، فأتلف أحد ملفاته، فإذا كانت الملفات التي يُتلفها الفيروس تتضاعف كلَّ دقيقة، فما مجموع الملفات التي سيُتلفها الفيروس بعد 15 دقيقة، إذا لم تتمّ السيطرة عليه؟

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

2) $2, 4, 8, \ldots$

3) $-4, 16, -64, \ldots$

4) $a_2 = 4,\ r = 3$

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $0.25, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 64$

6) $0.20, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 125$

مثال 4

7) **تدريب:** قامت شركة تعمل في مجال التطوير بإرسال 4 من خبرائها إلى بعض الدوائر التعليمية؛ لتدريب العاملين في هذه الدوائر على كيفية استخدام وتوظيف التكنولوجيا في تدريس المناهج، فقام كلُّ خبيرٍ منهم بتدريب 3 من مشرفي هذه الإدارات، وبدورهم قام كلُّ مشرفٍ منهم بتدريب 30 آخرين وهكذا … إذا استمر هذا النمط، فما مجموع المتدرِّبين الذين سيتم تدريبهم حتى المرحلة السادسة؟

مثال 5 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

8) $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$

9) $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6 أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $S_n = 85\frac{5}{16},\ r = 4,\ n = 6$

11) $S_n = 1020,\ a_n = 4,\ r = \frac{1}{2}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1

12) **طقس:** نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كلّ يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلٍّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟

أوجد a_n في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

13) $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

15) $-3, 6, -12, \ldots$

16) $-1, 1, -1, \ldots$

17) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

18) $a_3 = 28, r = 2$

19) $a_4 = -8, r = 0.5$

20) $a_6 = 0.5, r = 6$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

21) $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

22) $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين 2− , 16

مثال 4

24) **بندول:** يقطع بندول مسافة 30 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 اهتزازة.

الربط بالحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتزُّ اهتزازات منتظمة تقريبًا.

والاهتزازة الواحدة تعني حركة البندول جيئة وذهابًا حول موضع اتزانه.

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

25) $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

26) $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

27) $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

28) $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

29) $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6

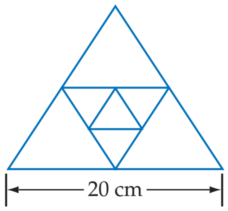
أوجد قيمة a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

31) $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

32) $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

33) **علوم:** ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كلّ دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق.

34) **هندسة:** في الشكل المجاور، طول ضلع المثلَّث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلَّث الداخلي الذي تنصِّف رؤوسه أضلاع المثلَّث الخارجي. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلَّثات الثمانية الأولى في النمط؟



35) **معالجة المياه:** يقوم نظام معيَّن لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب في أثناء مرور عيِّنة مياه خلاله. فإذا مرّت عيّنة مياه تحتوي 900 mg من الشوائب في النظام أربع مرات، فما كمية الشوائب المتبقّية في العيّنة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

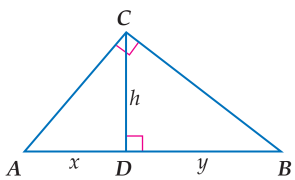
36) **برهان:** اشتقّ الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية.

37) **برهان:** اشتقّ صيغة للمجموع الجزئي لا تتضمّن a_1

38) **تبرير:** وضّح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$، للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيّرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضّح إجابتك.

39) **صيغ:** اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

40) **تحدٍّ:** استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة x, y



41) **مسألة مفتوحة:** اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252 .

42) **اكتب:** وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية و لا هندسية، أم كليهما.

تدريب على اختبار

43) إذا كان الحدّ الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟

A 5　　**C** 7

B 6　　**D** 8

44) **إجابة قصيرة:** عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟

مراجعة تراكمية

45) **نقود:** اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدمًا، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 2-2)

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك: (الدرس 2-1)

46) $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \dots$

47) $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \dots$

48) $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \dots$

49) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z، فأوجد قيمة y عندما $x = 9, z = -5$، علمًا بأن $y = -90$ عندما $z = 15$ ، $x = -6$. (الدرس 1-5)

50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. (مهارة سابقة)

اختبار منتصف الفصل

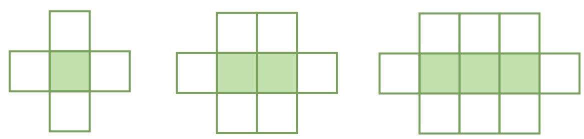
الدروس 1-2 إلى 3-2

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1) $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$

2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3) **هندسة:** الأشكال أدناه تُمثّل نمطًا من المربعات المظللة والمربعات غير المظلّلة.



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحدّ النوني) في هذا النمط.

b) هل يمكن الحصول على 84 مربعًا (غير مظلّل) بالضبط في هذا النمط؟

أوجد الحدّ التاسع في كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

4) $a_1 = 10, d = -5$

5) $a_1 = -8, d = 4$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

6) $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$

7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$

8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية

$\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟

9) **اختيار من متعدد:** ما مجموع أول 50 عددًا فرديًّا في الأعداد الطبيعية؟

A 625

B 2500

C 2499

D 2401

أوجد الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$

11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

12) **اختيار من متعدد:** ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟

$0.5, \underline{\ ?\ }, \underline{\ ?\ }, \underline{\ ?\ }, 2048$

A $512.375, 1024.25, 1536.125$

B $683, 1365.5, 2048$ أو $-683, 1365.5, -2048$

C $2, 8, 32$ أو $-2, 8, -32$

D $4, 32, 256$ أو $-4, 32, -256$

13) **دخل:** يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهريًّا. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

14) $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$

2-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية
Infinite Geometric Series

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية. (الدرس 2-3)

والآن:

- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (لانهائية).
- أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

المفردات:

المتسلسلة الهندسية اللانهائية
infinite geometric series

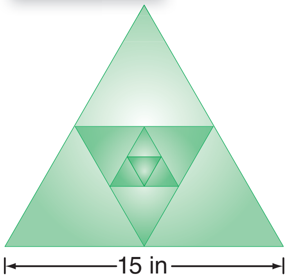
المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية
partial sum

المتسلسلة المتقاربة
convergent series

المتسلسلة المتباعدة
divergent series

مالانهاية
infinity

لماذا؟



أنشأ رسامٌ لوحةً فنيةً هندسيةً مستعملًا المثلَّثات المتطابقة الأضلاع فقط كما في الشكل المجاور، إذا كان طول ضلع المثلَّث الخارجي 15 in، والمثلَّث الذي يليه من الداخل ينتج عن توصيل منتصفات أضلاع المثلَّث الخارجي، إذا استمر في عملية رسم المثلَّثات الداخلية بهذا النمط، فكم سيكون مجموع محيطات كلِّ المثلَّثات المكوّنة للشكل؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

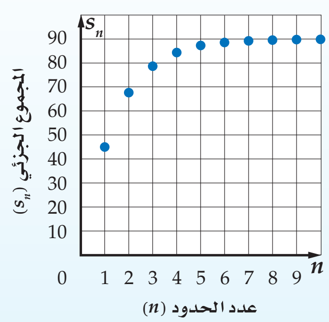
المتسلسلة الهندسية اللانهائية: المتسلسلة الهندسية التي لها عدد لا نهائي من الحدود تُسمى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية**، و**المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية** (S_n) هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها، وليس مجموع كل حدودها، والمتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متقاربة** عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n، وعندما لا تقترب هذه المجاميع من عدد ثابت مع زيادة قيمة n، فإن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متباعدة**.

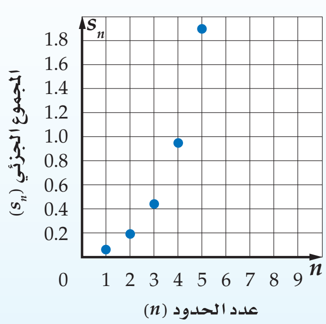
أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع محيطات المثلَّثات المكوّنة للشكل تُعطَى بالمتسلسلة اللانهائية $45 + 22.5 + 11.25 + \dots$، وكلما زاد عدد حدودها، فإن مجموعها يقترب من 90 in (وهو المجموع الفعلي لها عندما يزداد عدد حدودها إلى **مالا نهاية**). والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي: المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المتقاربة	المتسلسلات الهندسية المتباعدة
التعبير اللفظي: إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert < 1$؛ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت.	**التعبير اللفظي:** إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert \ge 1$؛ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت.
مثال: $45 + 22.5 + 11.25 + \dots$	**مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$





مثال 1 المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \dots$

أوجد قيمة r

$r = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$، وبما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

إرشادات للدراسة

المجاميع الجزئية يمكن توضيح التمثيل البياني للمجاميع الجزئية للمتسلسلة الواردة في فقرة "لماذا؟" بإنشاء الجدول التالي:

عدد الحدود n	المجموع الجزئي S_n
1	$s_1 = 45$
2	$s_2 = 45 + 22.5 = 67.5$
3	$s_3 = 45 + 22.5 + 11.25 = 78.75$
⋮	⋮

b) $8 + 12 + 18 + \dots$

$1.5 = \frac{12}{8} = r$ ، وبما أن $1.5 > 1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

1A) $2 + 3 + 4.5 + \dots$ **1B)** $100 + 50 + 25 + \dots$

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

أما $|r| \geq 1$ فتعني أن $r \leq -1$ أو $r \geq 1$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1}{1-r} = \frac{a_1(1-0)}{1-r}$

مفهوم أساسي **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة** أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ستشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (36)

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، ($|r| \geq 1$)، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضّح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \dots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًّا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

مثال 2 مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \dots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ اقسم الحدّ على الحدّ السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموعًا.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{5}}$ $a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{3}{5}$

$= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$ بسّط

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \dots$

$1.5 = \frac{9}{6} = r$؛ وبما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

تحقق من فهمك

2A) $4 - 2 + 1 - 0.5 + \dots$ **2B)** $16 + 20 + 25 + \dots$

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد

تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأيّ حدٍّ فيها أقلّ من القيمة المطلقة للحدّ السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

يمكنك استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية اللانهائية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ ، $a_1 = 18, r = \frac{4}{5}$ ثم بسِّط

$= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$ بسِّط

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

إرشادات للدراسة

رمز المجموع للمتسلسلة الهندسية اللانهائية

$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \ldots = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \ldots$$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$ ، $a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$

$= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ بسِّط

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

$x = 0.\overline{63}$ افترض $x = 0.\overline{63}$

$x = 0.636363\ldots$ اكتب في صورة كسر عشري دوري

$100x = 63.636363\ldots$ اضرب كلا الطرفين في 100

$99x = 63$ اطرح x من $100x$ و $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$

$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ اقسم الطرفين على 99

تحقق من فهمك

4) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب

في كثير من الأحيان يمكن حلُّ المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

تأكـد

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

1) $16 - 8 + 4 - \ldots$

2) $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

3) $440 + 220 + 110 + \ldots$

4) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$

مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إن وجدت:

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$

6) $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي:

7) $0.\overline{35}$

8) $0.\overline{642}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيّها متباعدة:

9) $21 + 63 + 189 + \ldots$

10) $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$

11) $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$

12) $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية إن وجد:

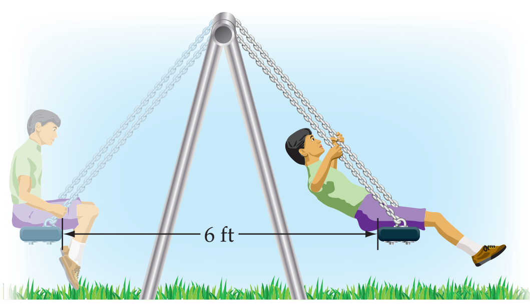
13) $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$

14) $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$

15) $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$

16) $32 + 40 + 50 + \ldots$

17) **أراجيح:** انطلق سعيد من نقطة البداية الموضَّحة في الشكل المجاور، تاركًا نفسه بعد ذلك من دون دفع منه، فبدأت مسافة التأرجح تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، أوجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقّف الأرجوحة تمامًا.



مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي إن وجدت:

18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$

19) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$

20) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

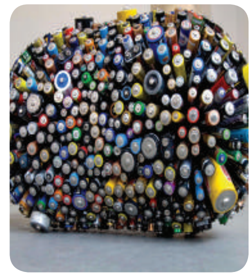
مثال 4 اكتب كلًّا من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

21) $0.3\overline{21}$

22) $4.\overline{96}$

23) $0.1\overline{214}$

24) **بطاريات قابلة للشحن:** أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟



الربط بالحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام، وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كلّ عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلًا من 100 بطارية عادية.

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية إن وجد:

25) $\frac{15}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \dots$

26) $-\frac{16}{9} + \frac{4}{3} - 1 + \dots$

27) $\frac{21}{16} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} + \dots$

28) **تمثيلات متعددة** ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

a) **حسيًّا:** افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قُصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحدّ الأول، ثم قُصَّ النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحدّ الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة اللانهائية، التي تعبِّر عن الأجزاء لديك.

b) **عدديًّا:** إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى مالانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع **a**؟

c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

29) **فيزياء:** في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وتركت لتتدحرج تلقائيًّا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft ، ثم بدأت تقطع في كلّ دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعتها في الدقيقة السابقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟

30) **بندول:** يقطع بندول مسافة 12 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقّف عن الحركة.

31) **كرات:** أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 ft، فكانت ترتدّ في كلّ مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فأوجد المسافة التي تقطعها حتى تقف.

32) **متحف العلوم:** يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحدّ الزوار بسحب جسم معلّق بزنبرك إلى أسفل، ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كلّ مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم.

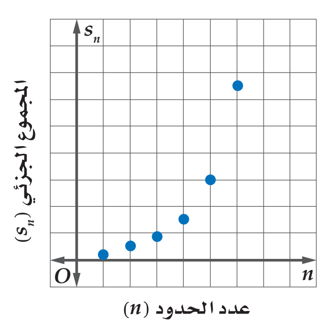
إرشادات للدراسة

أساس المتسلسلة

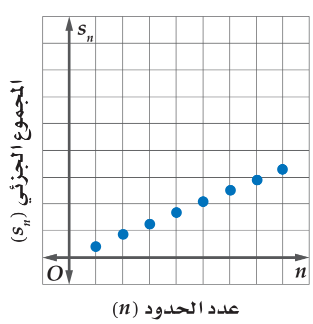
في السؤال 32 تنقص المسافة التي يقطعها الجسم المعلّق بالزنبرك 20%، أي أن المسافة التي يقطعها الجسم تمثّل 80% من المسافة السابقة لها قبل أن يغيّر اتجاه حركته.

اربط بين كلِّ شكل والوصف المناسب له:

33)



34)



a) متسلسلة هندسية متقاربة.

b) متسلسلة هندسية متباعدة.

c) متسلسلة حسابية متقاربة.

d) متسلسلة حسابية متباعدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **اكتشف الخطأ:** طُلِب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة ... $1 - 1 + 1 - 1$ فكانت إجاباتهما كما يأتي. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

علي	أحمد
المجموع صفر، لأن مجموع كلّ زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.	لا يمكن إيجاد المجموع، لأن $\lvert r \rvert \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

36) **صيغ:** اشتقّ معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

37) **تحدٍّ:** ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة ... $3 + 9b + 27b^2 + 81b^3 +$؟

38) **تبرير:** متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضّح تبريرك.

39) **مسألة مفتوحة:** اكتب المتسلسلة ... $3 - 6 + 12 -$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.

40) **اكتب:** وضّح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائمًا.

تدريب على اختبار

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدُّها الأول 27، وأساسها $\frac{2}{3}$ هو:

A 81

B 65

C 34

D 18

42) **هندسة:** ضُرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

43) **مسابقات:** تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كلّ جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصًا، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقّي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 2-3)

44) **حياكة:** مشغَلٌ فيه 9 عاملات، تنتج كلٌّ منهن فستانًا واحدًا يوميًا. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبيِّن مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كلّ يوم. (الدرس 2-2)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

45) $(y + 4)(y + 3)$

46) $(9p - 1)(3p - 2)$

توسـع **2-4**

معمل الحاسبة البيانية
نهاية المتتابعة
Sequence Limit

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأستكشف نهاية متتابعة.

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحدّ في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويُسمّى "الصفر" في هذه الحالة نهايةَ المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

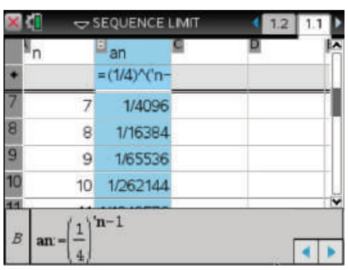
نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية ... $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$,

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

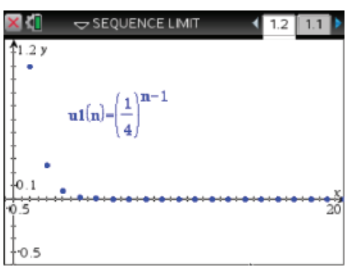
- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ومنها اختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز n ثم اضغط enter ، واكتب في أعلى العمود B الرمز a_n ثم اضغط enter .
- أدخل قيم n في العمود n بالترتيب، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحدِّ النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ثم اضغط enter واختر مرجع المتغير فتظهر الشاشة المجاورة.



لاحظ أنه كلما زادت قيمة n ، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0 ، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$ ، فإن قيمة كلِّ حدٍّ تكون قريبة من 0 ، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0 .

الخطوة 2: مثِّل المتتابعة.

- اضغط المفتاح on واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط enter فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على menu واختر منها 3: إدخال/ تحرير الرسم البياني ومنها اختر 6: متتابعة ومنها 1: متتابعة ، فتظهر شاشة أدخل فيها صيغة الحدّ النوني والحدّ الأول للمتتابعة واضغط enter .
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط menu ومنها 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 6: تكبير/تصغير الربع الأول .



ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضّح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$ ، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، ممّا يعني أن نهاية المتتابعة هي 0 .

تماريـن:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

3) $a_n = 5^n$

4) $a_n = \frac{1}{n^2}$

5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

6) $a_n = \frac{n^2}{n + 2}$

2-5 نظرية ذات الحدَّين
The Binomial Theorem

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

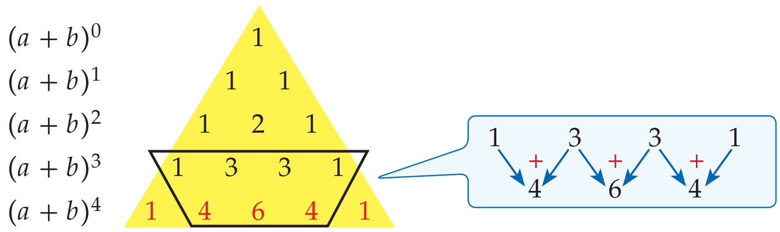
فيما سبق:
درست التوافيق واستعمالاتها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل مثلّث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- أستعمل نظرية ذات الحدَّين في إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.

المفردات:
مثلَّث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدَّين
Binomial Theorem

لماذا؟
يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 6 متخصِّصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلَّث باسكال: يُنسبُ **مثلَّث باسكال** إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (1623–1662)، على الرغم من قيام العديد من العلماء بدراسته قبله في بلاد المسلمين والهند وبلاد فارس والصين وإيطاليا، ويتكون المثلَّث من صفوف يكون بداية كل صف فيه ونهايته العدد 1، وكل عدد من الأعداد الأخرى في الصف، يكون ناتج جمع العددين اللذين فوقه على اليمين واليسار مباشرة، ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.



فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

الأُسس تبدأ من 4 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأُسس تبدأ من صفر وتتزايد إلى 4

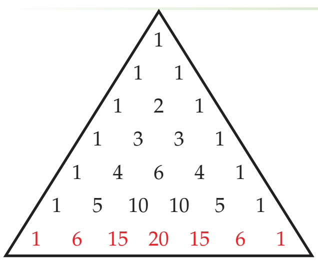
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود، ومجموع الأسس في كل حدٍّ هو 4

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال مثلَّث باسكال

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية، وذلك بإيجاد مفكوك $(a+b)^6$.

استعمل النمط أعلاه في كتابة مثلَّث باسكال لـ $(a+b)^6$.



$$(a+b)^6 = 1a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + 1a^0b^6$$
$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

عند جمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 64 توفيقًا من متخصِّصي المنطقتين يمكن استئجارهم، وبما أن العدد 15 في المقدار $15a^4b^2$ يُمثِّل عدد التوافيق التي فيها 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنان من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استئجار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{15}{64}$ أو 23% تقريبًا، وذلك بحسب تعريف الاحتمال النظري لحادثة، حيث إن عدد الطرائق الممكنة للحادثة هو 15 ، وعدد الطرائق جميعها 64.

✓ تحقق من فهمك

2) بالعودة إلى فقرة "لماذا"، إذا أراد مدير معمل التحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصِّصين، فما احتمالات أن يختار 6 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية؟

تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلَّث المشهور الذي يُسمى الآن مثلَّث باسكال.

مراجعة المفردات
التوافيق يسمى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية بالتوافيق.

نظرية ذات الحدَّين: يمكن استعمال نظرية ذات الحدَّين؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدَّين بدلًا من استعمال مثلَّث باسكال.

مفهوم أساسي — نظرية ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

عند استعمال النظرية عوِّض عن n بقيمة الأُسِّ. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمطَ نفسَه في مثلَّث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدّين سالبة $(a-b)^n$، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

مثال 2 استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق .

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدَّين .

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1\, a^6 b + {}_7C_2\, a^5 b^2 + {}_7C_3\, a^4 b^3 + {}_7C_4\, a^3 b^4 + {}_7C_5\, a^2 b^5 + {}_7C_6\, a b^6 + b^7$$
$$= a^7 + \frac{7!}{6!} a^6 b + \frac{7!}{2!5!} a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!} a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!} a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!} a^2 b^5 + \frac{7!}{6!} a b^6 + b^7$$
$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلَّث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد القوى، وبدلًا من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلَّث باسكال.

6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معاملا الحدَّين في ذات الحدَّين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدَّين.

مثال 3 استعمال نظرية ذات الحدَّين عندما يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4$$
$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!}(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}(5a)(-64b^3) + 256b^4$$
$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280ab^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

3) أوجد مفكوك $(3x-2y)^5$.

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذ ر عنصرًا كل مرَّة سابقًا بالرمز $ق^ن_ر$ ، وسيُرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_nC_r$.

إرشادات للدراسة

توافيق

- $0! = 1$
- ${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ${}_nC_0 = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{(n-0)!}} = \frac{1}{1} = 1$
- ${}_nC_n = 1$
- ${}_nC_n = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n-n)!} = \frac{1}{1} = 1$

إرشادات للدراسة

الحاسبة العلمية

يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة العلمية. اضغط على العدد n ثم SHIFT ثم ÷ ثم العدد r ثم = مثال 6 : ${}_6C_3$

20 = 3 ÷ SHIFT

إرشادات للدراسة

إشارات حدود مفكوك $(a+b)^n$

عند إيجاد مفكوك $(a+b)^n$، تكون إشارة كلّ حدٍّ في المفكوك تعتمد على إشارة كلٍّ من a ، b. فتكون إشارة الحدود كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك، ويمكنك عندها استعمال الحد العام في صيغة المجموع لنظرية ذات الحدَّين بحيث تجد الحدَّ الذي ترتيبه $k+1$ أو t_{k+1} في مفكوك $(a+b)^n$ باستعمال الصيغة $t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

مثال 4 إيجاد قيمة حدّ معيّن

أوجد قيمة الحدّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

استعمل صيغة الحدِّ العام لإيجاد الحدِّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$

$$t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$$

حيث $n = 11$، وبما أن الحدَّ المطلوب هو الحدُّ الخامس

أي $t_{k+1} = t_5$ ؛ لذا $k = 4$

إذن $t_5 = t_{4+1} = {}_{11}C_4\, y^{11-4}\, z^4$

$= 330\, y^7 z^4$

عند الحد الخامس تكون $k = 4$

${}_{11}C_4 = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة الحدِّ السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$.

ملخص المفاهيم مفكوك ذات الحدّين

أضف إلى مطويتك

في مفكوك ذات الحدَّين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أسّ a في الحدّ الأول هو n، وكذلك أسّ b في الحدّ الأخير هو n .
- يقلُّ أسّ a بمقدار واحد، ويزيد أسّ b بمقدار واحد في أيِّ حدّين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حدٍّ يساوي n دائمًا.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

تأكد

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

1) $(g+h)^7$ 2) $(x+3)^5$ 3) $(y-4z)^4$

4) **ولادة:** إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم).

مثال 4 أوجد قيمة الحدِّ المطلوب في مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

5) الحدّ السادس في مفكوك $(2c-3d)^8$

6) الحدّ الأخير في مفكوك $(5x+y)^5$

7) الحدّ الأول في مفكوك $(3a+8b)^5$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

8) $(c-d)^7$ 9) $(2a+4b)^4$ 10) $(3a-4b)^5$

11) **لجان:** إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلاب الصفَّين الأول الثانوي والثاني الثانوي في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الصف الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلّاب الصفَّين متساوٍ، وأن الاختيار يتم عشوائيًّا.

مثال 4 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممَّا يأتي:

12) الحدّ الرابع في مفكوك $(y-3x)^6$.

13) الحدّ السادس في مفكوك $(4x+5y)^6$.

14) الحدّ الخامس في مفكوك $(x-4)^9$.

15) الحدّ الرابع في مفكوك $(c+6)^8$.

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

16) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^4$

17) $\left(2b+\frac{1}{4}\right)^5$

18) **كرة سلَّة:** إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلَّة لأحد اللاعبين يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محدَّدة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرَّة من بين 12 محاولة.

19) **كرة قدم:** إذا كان احتمال أن يسجِّل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70% ، فأوجد احتمال أن يسجِّل 9 أهداف من 10 ضربات.

إرشادات لحل المسألة

نظرية ذات الحدَّين والاحتمال

يمكنك استعمال نظرية ذات الحدّين في حساب نتائج التجارب المستقلة المتكرِّرة. فإذا كان p يمثل احتمال النجاح، و $(q=1-p)$ يمثّل احتمال الفشل، فإن احتمال أن تكون x محاولة ناجحة من بين n محاولة تُعطَى بالصيغة التالية
$p(x)={}_nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

مسائل مهارات التفكير العليا

20) **تحدٍّ:** أوجد قيمة الحدّ السادس في مفكوك $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{12}$، ووضّح إجابتك .

21) **تبرير:** وضّح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كلٍّ من $(x+y)^n$, $(x-y)^n$ ، وكيف تختلف.

22) **مسألة مفتوحة:** اكتب قوة لذات حدَّين، الحدّ الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$.

23) **اكتب:** وضّح كيف يمكنك كتابة حدود مثلَّث باسكال.

تدريب على اختبار

24) **احتمال:** يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تمَّ سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟

A $\frac{5}{12}$ **B** $\frac{7}{15}$ **C** $\frac{5}{10}$ **D** $\frac{1}{5}$

25) أيُّ العلاقات التالية تُمثّل دالّة خطيَّة؟

A $y=\frac{x+3}{x+2}$

B $y=(3x+2)^2$

C $y=\frac{x+3}{2}$

D $y=|3x|+2$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

26) $a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n+5$

27) $a_6=-7,\ a_7=-1$

28) أوجد مجموع المتسلسلة $\ldots+\frac{3}{2}-6+3-$. (الدرس 2-4)

29) بيّن ما إذا كانت الجملة $2=\frac{(n+1)(n+1)}{2}$ صحيحة عندما $n=1$ ، أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

توسع

2-5

معمل الجبر

التوافيق ومثلّث باسكال

Combinations and Pascal's Triangle

الهدف أستعمل التوافيق ومثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

تذكّر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهمّ يُسمّى توفيقًا. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرّة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة في الصورة: ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهند في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1: إذا لم يفُز المتسابق في أيِّ مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرّة.

وتعلم مسبقًا أن ${}_nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}_5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًّا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أيِّ جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أيِّ 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلّث باسكال.

الخطوة 2: تفحّص مثلّث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلّث باسكال من 0 إلى 5

الصف 0			1			
الصف 1			1	1		
الصف 2		1	2	1		
الصف 3		1	3	3	1	
الصف 4	1	4	6	4	1	
الصف 5	1	5	10	10	5	1

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصفِّ الخامس. فالعدد الأول في الصفِّ الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

حلِّل النتائج:

1) اكتب تخمينًا حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ من العناصر من بين n من العناصر.

2) على افتراض أن قواعد المسابقة تغيّرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ جوائز.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ
Proof by Principle of Mathematical Induction

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية. (الدرس 2-2)

والآن:

- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضادّ.

المفردات:

مبدأ الاستقراء الرياضيّ
mathematical induction

فرضية الاستقراء
induction hypothesis

لماذا؟

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الصورة المجاورة، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى.
وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

مبدأ الاستقراء الرياضيّ: **مبدأ الاستقراء الرياضيّ** هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسيٌّ — مبدأ الاستقراء الرياضيّ

أضف إلى مطويتك

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمّى **فرضية الاستقراء** .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 — برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ ؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أيْ برهن أن الجملة $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ صحيحة.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ فرضية الاستقراء

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$ اجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$ اجمع

$$= \frac{(k+1)^2\,[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$ حلّل

$$= \frac{(k+1)^2\,(k^2 + 4k + 4)}{4}$$ بسّط

$$= \frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}$$ حلّل

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وكما في برهان المجموع فإن مبدأ الاستقراء الرياضيّ يمكنك استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضًا.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن $8^n - 1 = 8^1 - 1 = 7$. وبما أن 7 يقبل القسمة على 7 ، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 ، حيث k عدد طبيعي، وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث إن $8^k - 1 = 7r$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$ أي برهن أن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 ؛

$8^k - 1 = 7r$ فرضية الاستقراء

$8^k = 7r + 1$ أضف 1 لكلا الطرفين

$8(8^k) = 8(7r + 1)$ اضرب كلا الطرفين في 8

$8^{k+1} = 56r + 8$ بسِّط

$8^{k+1} - 1 = 56r + 7$ اطرح 1 من كلا الطرفين

$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$ حلِّل

وبما أن r عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7 ؛
إذن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 .
وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة
يقال عن عدد ما: إنه يقبل القسمة على 4 إذا أمكن كتابة ذلك العدد في الصورة $4r$، حيث r عدد طبيعي، ويُستعمل هذا التعبير في برهان قابلية القسمة.

الأمثلة المضادّة يمكنك إثبات خطأ جملة رياضية من خلال مبدأ الاستقراء الرياضيّ، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضادٍّ تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مثال 3 استعمال المثال المضادّ لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًّا يبيِّن خطأ الجملة: " $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 ، حيث n أي عدد طبيعي".

اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

إذن فالقيمة $n = 3$ تُعدُّ مثالًا مضادًّا للجملة.

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: " $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$، حيث n أيّ عدد طبيعي".

مراجعة المفردات

مثال مضادٌّ
أحد معاني كلمة مضادّ هو مناقض، لذلك فإن المثال المضادّ هو مثال يناقض الفرضية.

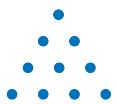
✓ تأكـد

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

2) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3) **نظرية الأعداد:** يُسمّى العدد عددًا مثلَّثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلَّث كما في الشكل أدناه.



10

a) إذا علمت أن العدد المثلَّثي الأول هو 1، فأوجد الأعداد المثلَّثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلَّثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أنّ مجموع أول n من الأعداد المثلَّثية يساوي: $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9

5) $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4

7) $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب وحل المسائل

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

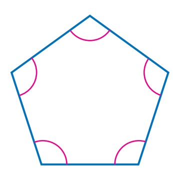
8) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

9) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

10) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

12) **هندسة:** مستعملًا مبدأ الاستقراء الرياضيّ والهندسة؛ برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلَّع محدَّب $[180.(n - 2)]$، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$.



مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

13) $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

14) $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

15) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (2n + 2)^2$

16) $n^2 + n + 23$ عدد أولي.

الربط بالحياة

تظهر حدود متتابعة فيبوناشي كثيرًا، كما في بذور قرص تباع الشمس، إذ يمكن رسم 13 أو 21 أو 55 شكلًا حلزونيًا اعتمادًا على درجة ميل الشكل، وجميعها من عناصر متتابعة فيبوناشي.

(17 **متتابعة فيبوناشي:** تبدأ متتابعة فيبوناشي بالحدود ... , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1 ، ويكون الحدّ التالي فيها مساويًا لمجموع الحدّين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحدّ الثاني). فإذا كان f_n يمثّل عدد فيبوناشي ذا الرقم n، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كلّ جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعطِ مثالًا مضادًّا يُثبت خطأها:

(18 $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6

(19 $18^n - 1$ يقبل القسمة على 17

(20 $n^2 + 21n + 7$ عدد أولي.

(21 $n^2 + 3n + 3$ عدد أولي.

(22 $500 + 100 + 20 + \dots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

(23 **تحدٍّ:** اكتب قاعدة تُمثّل المجموع $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$، ثم برهنها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

تبرير: **حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأً. وضّح إجابتك.**

(24 إذا لم تستطع إيجاد مثال مضادٍّ في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

(25 إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ ، وعند $n = k + 1$، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

(26 **تحدٍّ:** برهن أن : $2(11^n) + 5^2$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

(27 **مسألة مفتوحة:** اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

(28 **اكتب:** وضّح مبدأ الاستقراء الرياضيّ بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

(29 أيُّ الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًّا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي؟

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

(30 **مبدأ العدّ:** يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه، والرموز الأربعة التالية مكوَّنة من أرقام العدد 1986 ، والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-2)

(31 الحدّ الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

(32 الحدّ الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

(33 الحدّ الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين :

(34 $5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 1000$ (الدرس 2-2)

(35 $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \dots$ (الدرس 4-2)

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 2-2 ، 2-1)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d يُعطى بالصيغة:
$a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 2-4 , 2-3)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$، حيث $r \neq 1$
- مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُعطى بالصيغة:
$S = \frac{a_1}{1-r}$ ، حيث $|r| < 1$.

نظرية ذات الحدَّين (الدرس 2-5)

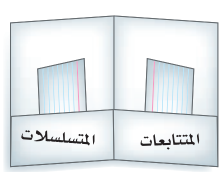
- نظرية ذات الحدَّين:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

مبدأ الاستقراء الرياضيّ (الدرس 2-6)

- مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات منظم افكار

تأكَّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات

- المتتابعة ص 66
- الحدّ ص 66
- المتتابعة المنتهية ص 66
- المتتابعة غير المنتهية ص 66
- المتتابعة الحسابية ص 66
- أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) ص 66
- المتتابعة الهندسية ص 68
- أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) ص 68
- الأوساط الحسابية ص 73
- المتسلسلة ص 74
- المتسلسلة الحسابية ص 74
- المجموع الجزئي ص 74
- رمز المجموع ص 75
- الأوساط الهندسية ص 81
- المتسلسلة الهندسية ص 82
- المتسلسلة الهندسية اللانهائية ص 87
- المجموع الجزئي لمتسلسلة لانهائية ص 87
- المتسلسلة المتقاربة ص 87
- المتسلسلة المتباعدة ص 87
- ما لا نهاية ص 87
- مثلث باسكال ص 94
- نظرية ذات الحدّين ص 95
- مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 99
- فرضية الاستقراء ص 99

اختبار المفردات

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدِّل المصطلح الذي تحته خطٌّ لتصبح العبارة صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة اللانهائية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلّقة بالأعداد الطبيعية.

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحدّ هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًّا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حدٍّ فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة $5, 11, 17, 23$.

9) باستعمال نظرية ذات الحدّين فإن:
$(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

2-1 المتتابعات بوصفها دوالّ ص 66–71

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

10) $a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ?$

11) $a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ?$

حدّد نوع المتتابعة، ثم أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعتين الآتيتين ومثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

12) $10, 7, 4, \ldots$

13) $800, 200, 50, \ldots$

مثال 1

أوجد الحدّ الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها:

$\boldsymbol{a_1 = -15, d = 6}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_{11} = -15 + (11-1)6$ $\quad n = 11, a_1 = -15, d = 6$

$a_{11} = 45$ بسّط

2-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 72–79

أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

14) $-12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

15) $15, \underline{?}, \underline{?}, 29$

16) $12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -8$

17) $72, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 24$

18) **توفير:** يوفِّر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدَّة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفِّره في نهاية السنتين؟

أوجد S_n كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

19) $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

20) $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

21) $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

22) $16 + 7 + (-2) + \cdots + (-65)$

23) **مسرح:** لكي يؤدِّي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النصّ مرّتين في اليوم الأول، وأربع مرّات في اليوم الثاني، وست مرّات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرّات التي سيتدرَّبها في اليوم العشرين؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

24) $\sum_{k=5}^{21} (3k - 2)$

25) $\sum_{k=0}^{10} (6k - 1)$

26) $\sum_{k=4}^{12} (-2k + 5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين العددين 39 ,3 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$ الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_4 = 3 + (4-1)d$ $\quad n = 4, a_1 = 3$

$39 = 3 + 3d$ $\quad a_4 = 39$

$12 = d$ بسّط

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$\boldsymbol{a_1 = 18, a_n = 56, n = 8}$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$ $\quad n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$

$= 296$ بسّط

مثال 4

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية: $\sum_{k=3}^{15} (5k + 1)$

استعمل الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

في المتسلسلة 13 حدًّا، وحدُّها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$$

$$= 598$$

2-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 80-85

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

27) $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$

28) $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$

29) $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

30) $6, \underline{?}, \underline{?}, 162$

31) $8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 648$

32) $-4, \underline{?}, \underline{?}, 108$

33) **تخفيضات:** أعلن أحد المتاجر عن تخفيضات كبرى، فبلغت مبيعاته 2048000 ريال في اليوم الأول، ومع نفاد بعض السلع فإن مبيعاته صارت تقلُّ إلى النصف يوميًّا. إذا استمر انخفاض المبيعات بهذا المعدّل، فكم ريالًا ستكون مبيعات المتجر في اليوم الثاني عشر من التخفيضات؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين:

34) $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

35) $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

مثال 5

أوجد الحدّ السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها: $a_1 = 9, r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية

$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$ $n = 6, a_1 = 9, r = 4$

$a_6 = 9216$

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية

$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$ $n = 4, a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ بسّط

الوسطان الهندسيان هما: $3(3) = 9$ ، $1(3) = 3$.

مثال 7

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$ $n = 6, a_1 = 2, r = 4$

$= \frac{-8190}{-3} = 2730$ بسّط

2-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية ص 87-92

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية فيما يأتي إن وجد:

36) $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

37) $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \dots$

38) $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

39) **ألعاب:** أُسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها $60\ ft$، فارتدَّت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمرَّ ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي فيها: $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$ $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$ بسّط

الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

2-5 نظرية ذات الحدَّين ص 97–94

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

40) $(a+b)^3$

41) $(y-3)^7$

42) $(3-2z)^5$

43) $(4a-3b)^4$

44) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^5$

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

45) الحدّ الثالث في مفكوك $(a+2b)^8$

46) الحدّ السادس في مفكوك $(3x+4y)^7$

47) الحدّ الثاني في مفكوك $(4x-5)^{10}$

مثال 9

أوجد مفكوك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4 = x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد قيمة الحدّ الرابع في مفكوك $(x+y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدّين لكتابة المفكوك

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!} x^{8-k} y^k$$

بالنسبة للحدّ الرابع فإن $k=3$، لذلك يكون الحدّ الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} x^{8-3}y^3 = 56x^5y^3$$

2-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 102–99

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

48) $2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49) $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 .

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجمل الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي:

50) $8^n + 3$ يقبل القسمة على 11 .

51) $6^{n+1} - 2$ يقبل القسمة على 17 .

52) $n^2 + 2^n + 4$ عدد أولي .

53) $n + 19$ عدد أولي.

مثال 11

برهن أن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n

الخطوة 1 عندما $n=1$ ، فإن: $9^n + 3 = 9^1 + 3 = 12$.
وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افترض أن $9^k + 3$ يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $9^k + 3 = 4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 برهن صحّة الجملة عند $n = k+1$ ، أي برهن أنَّ $(9^{k+1} + 3)$ يقبل القسمة على 4

$9^k + 3 = 4r$	فرضية الاستقراء
$9^k = 4r - 3$	اطرح 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} = 36r - 27$	اضرب كلا الطرفين في 9
$9^{k+1} + 3 = 36r - 27 + 3$	أضف 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} + 3 = 36r - 24$	بسّط
$9^{k+1} + 3 = 4(9r - 6)$	حلّل

وبما أن r عدد كلي فإن $9r - 6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n = k+1$

إذن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

اختبار الفصل

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين إن وجد:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$

3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية $81, 72, 63, \dots$.

4) أوجد الحدّ الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 9, d = 5$

5) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ الثامن في المتتابعة الحسابية $18, 20.2, 22.4, 24.6, \dots$ ؟

A 26.8   C 31.2

B 29   D 33.4

6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $-9, 11$.

7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$

8) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية أدناه؟ $10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \dots$

A $\frac{13}{32}$ C $\frac{5}{128}$

B $\frac{5}{32}$ D $\frac{5}{8}$

9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536$

10) أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية التي فيها $a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

11) $\sum_{k=2}^{12} (3k-1)$

12) $45 + 37 + 29 + \dots + -11$

13) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

14) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5$

15) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n$

16) أوجد مفكوك $(2a - 3b)^4$

17) أوجد معامل الحدّ الخامس في مفكوك $(m + 3n)^6$

18) أوجد الحدّ الرابع في مفكوك $(c + d)^9$.

برهن صحة كلٍّ من الجملتين الآتيتين، لكل عدد طبيعي n

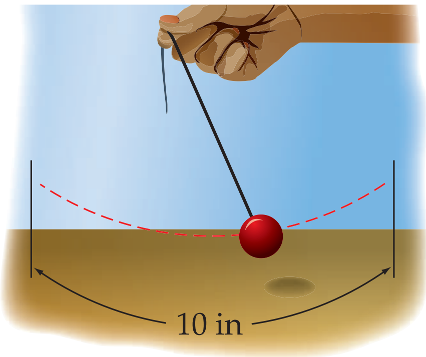
19) $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$

20) $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 .

21) أوجد مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ الجملة الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي: $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4

22) **مدرسة:** إذا كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي يساوي عدد طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلاب الثمانية من الصف الأول الثانوي؟

23) **بندول:** يقوم سعد بتحريك بندول، بحيث تتناقص المسافة التي يقطعها البندول في كل اهتزازة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة قطعها البندول 10 in، فأوجد المسافة الكلية التي يكون البندول قد قطعها عندما يتوقّف عن الحركة.



البحث عن نمط

تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حلِّ المسألة استعمالًا. وتعدّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبريًّا، وتوسيع النمط أدوات مهمّة جدًّا في حلِّ المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرُّف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة تتوصَّلُ من خلالها من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسبًا.

خطوة 3

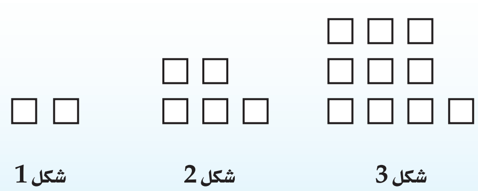
أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط، وحُلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكّد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلّها:

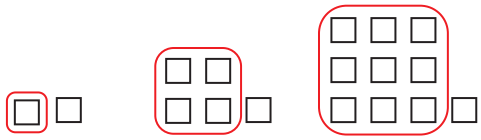
انظر إلى متتابعة الأشكال المربَّعة المعطاة. ما عدد المربعات التي تحتاج إليها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟



A 55
B 65
C 74
D 82

الخطوة 1: **تعرَّف النمط.**

- اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع.
- ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عُدّ المربعات في كل شكل، ولاحظ أن عدد المربعات في كل شكلٍ هو



$1 + 1$	$4 + 1$	$9 + 1$
$1^2 + 1$	$2^2 + 1$	$3^2 + 1$

الخطوة 2: **عمّم النمط.**

- أي أن عدد مربعات الشكل التالي هو $1 + 60^2$ أو 17
- اكتب العبارة الجبرية التي تُمثّل نموذجًا لهذا النمط.

التعبير اللفظي	**عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.**
متغير	**افترض أن n يُمثّل رقم الشكل.**
المعادلة	$a_n = n^2 + 1$

الخطوة 3: **وسِّع النمط.**

- استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطًا لحلّ المسألة.

1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحدّ التالي في هذه المتتابعة؟

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

A 36 **C** 31

B 34 **D** 29

2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

A 17

B 20

C 18

D 21

الفصل 2

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) أوجد قيمة الحدّ التالي في المتتابعة الحسابية:

$7, 13, 19, 25, 31, \ldots$

A 36

B 37

C 38

D 39

2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k-1)$

A 119

B 826

C 945

D 1072

3) صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية الممثَّلة في الجدول المجاور هي:

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

4) تدَّعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرَّات متتابعة، فما نسبة الشوائب التي سوف تُزال؟

A 0.1%

B 0.01%

C 99.99%

D 99.9%

5) أيُّ المتسلسلات الهندسية الآتية متباعدة؟

A $\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6) إذا علمت أن $x-5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + k$ ، فما قيمة k ؟

A 1

B 7

C 15

D 35

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8) أوجد مفكوك $(c+d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدّين.

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

9) $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c}$

10) $\frac{x^2-x-20}{2x+8} \cdot \frac{3x}{x-5}$

11) إذا كان $f(x)=2x+4, g(x)=x^2+5$، فما قيمة $f[g(6)]$؟

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضّحا خطوات الحل :

12) برهن صحّة الجملة الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.
" 7^n-1 يقبل القسمة على 6 ".

13) يقطع خالد مسافة معيّنة على دراجة هوائية في 2.5 ساعة. وإذا زاد من سرعته فإنه يقطع المسافة نفسها في ساعتين.

a) هل يُمثّل هذا الوضع تناسبًا طرديًّا أم تناسبًا عكسيًّا؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كانت سرعته عندما قَطَعَ المسافة في 2.5 ساعة. 12 km/h، فكم يجب أن تكون سرعته ليقطع المسافة ذاتها في ساعتين؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	2-2	2-2	2-3	2-3	2-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	2-5	1-1	1-1	مهارة سابقة	2-6	1-5

الفصل 3

الاحتمالات
Probabilities

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، والتباديل والتوافيق، واحتمالات الحوادث البسيطة والمركبة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثِّل فضاء العيِّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

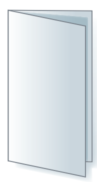
لماذا؟

ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

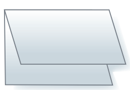
المطويات منظم أفكار

الاحتمالات: اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات؛ مستعملًا ورقة A3.

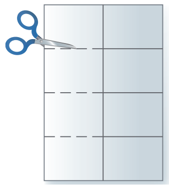
1 **اطوِ الورقة** طوليًا.



2 **اطوِ الورقة** نصفين مرتين.



3 **قصّ كل خط طي أفقيًا** في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.



4 **اكتب العناوين** كما في الشكل.

التهيئة للفصل الثالث

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-3)

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ 2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$ 3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$

4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$ 5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$ 6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7) **كرة قدم:** لدى فريق كرة قدم 54 لترًا (L) من الماء البارد في قوارير سعة كلٍّ منها 500 ملّلترًا (ml). كم قارورة لديهم؟

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-3 إلى 3-3)

8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1.

9) أن يكون العدد الظاهر فرديًّا.

10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2.

11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6).

12) **احتمالات:** ألقي مجسم ذو 4 وجوه متطابقة، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 1-4. (تستعمل مع الدرس 1-3)

النتيجة	الإشارات	التكرار
1					3
2	𝍸 ||	7
3	𝍸		6
4						4

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟

14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟

15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

$\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$ اضرب البسط في البسط والمقام في المقام

$=\frac{6}{18}$

$=\frac{1}{3}$ بسّط

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من }5)=\frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$، ويساوي 67% تقريبًا.

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5 .

النتيجة	الإشارات	التكرار
1						4
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |||	8
4						4
5				2
6	𝍸	5

$$P(5)=\frac{\text{عدد مرات ظهور 5}}{\text{عدد جميع النواتج}}=\frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{2}{30}$ ويساوي 6.7% تقريبًا

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

فيما سبق:

درستُ حساب الاحتمال التجريبي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل القوائم، والجداول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:

فضاء العيِّنة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أيُّ الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة : لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة .
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتجٍ ممكنٍ من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L   T , L

L , T   T , T

الجدول

دوّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري

النواتج

الرمية الأولى	L		T	
الرمية الثانية	L	T	L	T
فضاء العيِّنة	LL	LT	TL	TT

إرشادات للدراسة

المكعب المرقّم

هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6.

تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمَّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة — الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

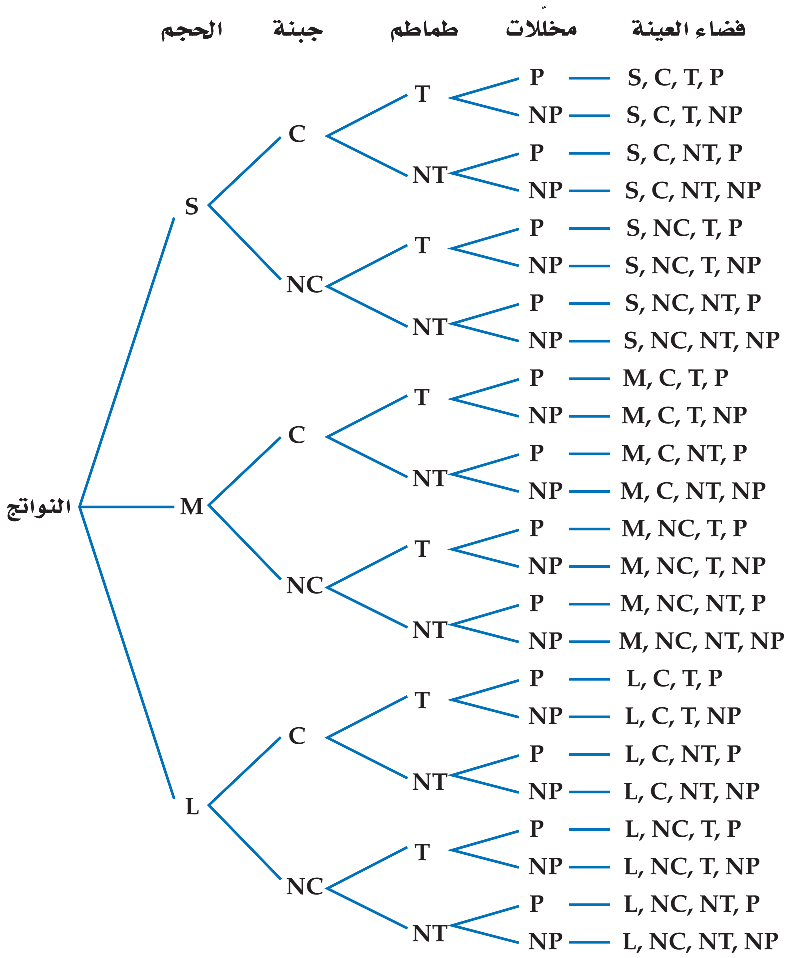
شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر لحم كما هو مبين في قائمة الشطائر المجاورة.

مثِّل فضاء العيِّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
- اختيار الجبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC).
- اختيار الطماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT).
- اختيار المخلّلات (مع مخلّلات P، بدون مخلّلات NP).

أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تحقق من فهمك

2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي(S) أو أسود(B) أو أحمر(R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/ أو غطاء للجهاز(W). مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

تنبيه !

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2 ، يختصر الحرفان: و/ أو مرحلتين للاختيار هما:

– مع طماطم أو بدون طماطم.

– مع مخللات أو بدون مخللات. ويقابل هذا أربعة اختيارات ممكنة هي: مع الطماطم فقط، أو مع المخللات فقط، أو مع الطماطم والمخللات أو بدون طماطم ولا مخللات.

قراءة الرياضيات

رموز الرسم الشجري

اخترْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في الرسم الشجري. ففي المثال 2، تدل C على اختيار الجبنة، وNC تدل على عدم اختيار الجبنة، أمّا NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

مبدأ العد الأساسي: قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي — مبدأ العدّ الأساسي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

⋮

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب

يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعدّ.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال مبدأ العدّ الأساسي

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوب من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

استعمل مبدأ العد الأساسي.

الأزرار		الفتحة الأمامية		القبّة		الأكمام		اللون		القماش
$1080 = 2$	$\times$	2	$\times$	3	$\times$	3	$\times$	6	$\times$	5

إذن لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.

الربط بالحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

تحقق من فهمك

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

3B) رمي مكعب مرقّم أربع مرات.

3C) **أحذية:** اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 45 , 44 , 43 , 42 , 41 , 40 , 39 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

نموذج الإجابة

1. A B C D
2. A B C D
3. A B C D
4. A B C D
5. A B C D
6. A B C D
7. T F
8. T F
9. T F
10. T F

تأكـد

مثال 1 للسؤالين 1 ، 2 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

1) عندما يضرب اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لايسجل (O). افرض أن اللاعب ضرب ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

مثال 2

3) **ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثّل فضاء العيِّنة في هذا الموقف بالرسم الشجري.

مثال 3

4) **مطاعم:** عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكلّ صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كلِّ صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

تدرب وحل المسائل

مثال 1 للأسئلة 5 ، 7 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيٍّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلّثات؛ أحدهما يشتمل على مثلّث منفرج الزاوية (O) أو مثلّث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلّث متطابق الضلعين (E) أو مثلّث مختلف الأضلاع (N).

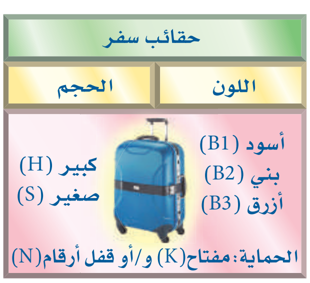
8) **رسم:** ينفّذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

ألوان زيتية (O) ألوان مائية (A)

مثال 2 للسؤالين 9 ، 10 مثّل فضاء العيِّنة مستعملًا الرسم الشجري في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) **سيارات:** يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاحة (N) و/ أو سقف متحرك (R).

10) **حقائب:** يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًّا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح و/ أو قفل أرقام.



مثال 3

11) **نشاطات:** تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الرياضي وَ 4 طلاب للنشاط العلمي وَ 5 طلاب للتوعية الإسلامية وَ طالبان للإذاعة المدرسية، على ألا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

12) **فن:** أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال الجدول والرسم الشجري.

13) **إفطار:** الإعلان المجاور، يوضِّح قائمة وجبة الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟

14) **دراجات:** اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9.

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضِّح إجابتك.

15) **تمثيلات متعددة:** تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولًا دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقِ مكعبًا مرقّما، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2.

a) **هندسيًّا:** استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة.

b) **منطقيًّا:** ارسم شكل ڤن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة.

c) **تحليليًّا:** ما عدد النواتج الممكنة؟

d) **لفظيًّا:** هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر

إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

16) **تحدٍّ:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برِّر إجابتك.

17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرِّر إجابتك.

18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضِّح إجابتك.

19) **اكتب:** وضِّح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

20) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

A 4   **C** 8

B 6   **D** 9

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

A 12   **C** 60

B 35   **D** عدد لانهائي

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

23) $3 , 12 , 48 , 192 , ...$ (الدرس 3-2)

24) $-10 , -6 , -2 , 2 , ...$ (الدرس 2-2)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين (الدرس 6-1)

25) $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{10}{7}$

26) $1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$

أوجد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

27) $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$

28) $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$

29) $\frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فيما سبق:
درست استعمال مبدأ العد الأساسي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال .

المفردات:
المضروب
factorial
التباديل
permutations
التباديل الدائرية
circular permutation
التوافيق
combinations

لماذا؟

وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًّا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.

يمكن كتابة العبارة $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4\,!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$.

مثال 1 الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة : نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌّ منهم قميصًا مرقّمًا من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$.

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $18! = (20-2)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$P(\text{نواف } 1 \text{ و ماجد } 2) = \frac{18!}{20!}$$
عدد نواتج الحادثة ←
عدد النواتج الممكنة ←

$$= \frac{\cancel{18!}^{1}}{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}_{1}}$$
جِد مفكوك 20! واقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{1}{380}$$
بسِّط

إرشادات للدراسة

العشوائية
عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًا تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

تحقق من فهمك

1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

ارجع إلى فقرة " لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائيًّا ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360 .

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز $_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$$_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$ حيث

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2 الاحتمال والتباديل

مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًّا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًّا.
عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي $_{10}P_3$

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيسًا ومحمد نائبًا ومهند أمينًا للسر يساوي $\frac{1}{720}$.

إرشادات للدراسة

الاحتمال والتباديل: يمكنك حل المثال 2 بالطريقة نفسها التي استعملت في المثال 1

تحقق من فهمك

2) **بطاقات جامعية:** تستعمل الأرقام 1–9 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟

تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — التباديل مع التكرار

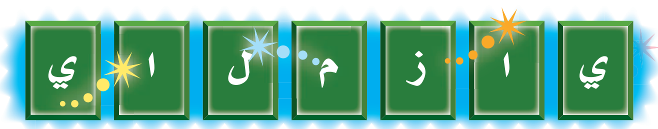
أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا . . .، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

مثال 3 الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

استعمل الآلة الحاسبة

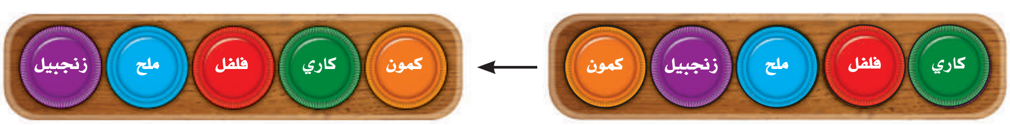
الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًّا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$.

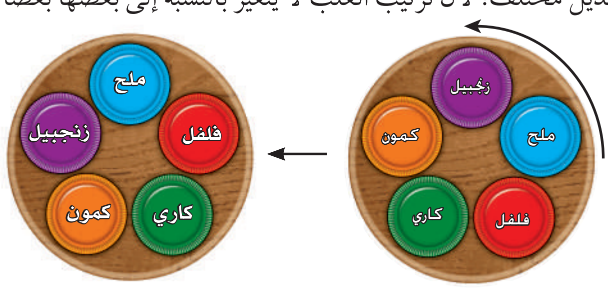
تحقق من فهمك

3) **أعداد:** تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًّا باستعمال الأرقام 3 ,5 ,1 ,2 ,5 ,1، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي !5 .



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتْ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5 - 1)!$$

الربط بالحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة "فأسقيناكموه" من الآية 22 من سورة الحجر.

مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدَّد مسبقًا في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطيًّا وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

إرشادات للدراسة

التباديل الدائرية عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسومًا على عددها.

مثال 4 الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

a) **زينة:** إذا رتُبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

إرشادات للدراسة

النقطة المرجعية قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدِّد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجعية ثابتة أم لا.

b) **طعام:** **جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟**

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجعية ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6 .

لذا، فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

تحقق من فهمك

4A) **بطاقات:** إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

4B) **كرة قدم:** تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضّح تبريرك.

الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق**: هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظَّفَيْنِ من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظَّفَيْنِ غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظَّفَيْنِ.

مفهوم أساسي

التوافيق

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nC_r$ ، حيث $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$$_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

مثال 5 الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: **يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟**

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة، أي ${}_{10}C_6$.

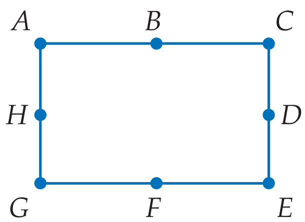
$${}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{210}$.

تحقق من فهمك

5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



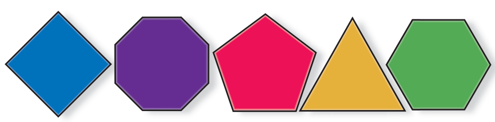
إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق
استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

تأكد

مثال 1

1) **هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلّث هو الأول والمربع هو الثاني؟



مثال 2

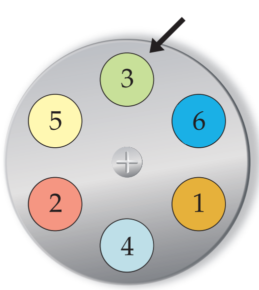
2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

مثال 3

3) **أعداد:** يتكون عدد من الأرقام $5, 6, 6, 3, 3, 3, 1$. ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133 ؟

مثال 4

4) **كيمياء:** في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رتُبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.



a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

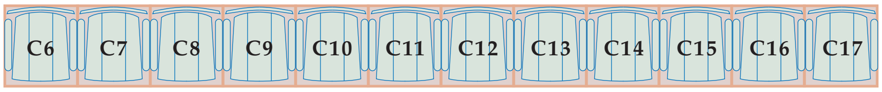
b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

مثال 5

5) **مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

تدرب وحل المسائل

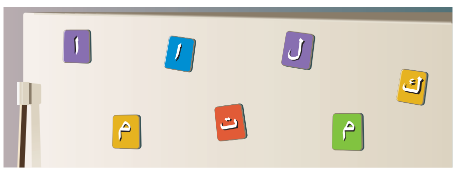
مثال 1 (6 **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



(7 **حفلات:** وَزِّعت بطاقات مرقّمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23 ؟

مثال 2 (8 **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

مثال 3 (9 **أحرف ممغنطة:** اشترى عدنان أحرفًا ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور عشوائيًّا، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟



(10 **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 7, 9, 5, 7, 2؟

مثال 4 (11 **مجموعات:** يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟

(12 **مدينة ألعاب:** ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟

(13 **ألعاب:** رُتبت 8 كرات مرقّمة بالأرقام 13 ,12 ,11 ,9 ,8 ,7 ,6 ,2 عشوائيًّا في صف:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار على الترتيب؟

b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أدناه؟

c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟

(14 **كرات:** إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6 ، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟

مثال 5 (15 **مستقيمات:** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

16) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم أنها غير صحيحة أبدًا ؟ برّر إجابتك.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

17) **تحدٍّ:** يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nC_r = {}_nP_r \cdot r!$.
بيّن صحّة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضِّح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعامل مقداره $r!$.

18) **مسألة مفتوحة:** صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$.

19) **برهان:** برهن أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

20) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق .

تدريب على اختبار

21) **احتمال:** يقف رجلان وولدان في صفٍّ واحدٍ. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفَي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

A $\frac{1}{24}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{2}$

22) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف ء س ف ي س ا

23) **احتمال:** ألقي مكعب مرقّم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا أُلقي المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

A 1

B $\frac{9}{10}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

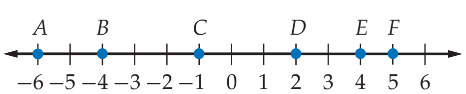
24) **تسوّق:** لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-3)

مثّل فضاء العيِّنة في كلِّ تجربةٍ ممّا يأتي بالرسم الشجري :

25) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس 1-3)

26) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، و4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. (الدرس 1-3)

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي مستعملًا خط الأعداد: (مهارة سابقة)



27) DF

28) AE

29) EF

30) BD

31) AC

32) CF

3-3

الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.
(مهارة سابقة)

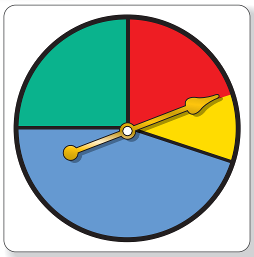
والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال الأطوال.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحات.

المفردات:

الاحتمال الهندسي
geometric probability

لماذا؟



في القرص ذي المؤشر الدَّوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

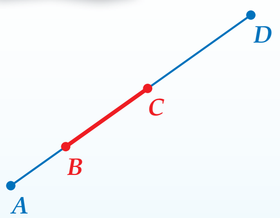
الاحتمال الهندسي: احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة **احتمالاً هندسيًّا**.

مفهوم أساسي — الاحتمال والأطوال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا على $\overline{AD}$، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

إرشادات للدراسة

الاحتمال والأطوال

$P(E \in \overline{BC})$ تعني احتمال أن تقع النقطة E على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

$P(X \in \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$	احتمال الأطوال
$= \frac{7}{14}$	$KL = 7\ ,\ JM = 3 + 7 + 4 = 14$
$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$	بسّط

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

(1A $P(X \in \overline{LM})$ **(1B** $P(X \in \overline{KM})$

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج.

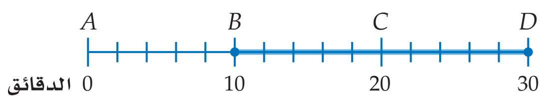
الربط بالحياة

الحافلة وسيلة نقل للركاب، تُصمّم بأحجام مختلفة. وتسير معظم الحافلات بالديزل أو البنزين، ومنها ما يسير بالكهرباء، وبعضها ذات مفاصل مترابطة؛ أي لها قسمان متصلان بغطاء مرن. وتسعى شركات الحافلات إلى تخفيض أجرتها؛ ليصبح النقل العام أكثر شعبية لدى المسافرين.

مثال 2 من واقع الحياة — نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الراكب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذه الحادثة.

$P($انتظار 10 دقائق أو أكثر$) = \frac{BD}{AD}$ احتمال الطول

$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ $BD = 20, AD = 30$

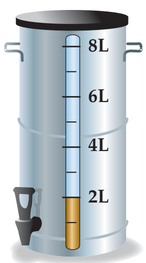
لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$, أو 67% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) شاي: يحضِّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L ؟

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أيِّ وقت بين 2L و 3L؟



الاحتمال والمساحة: تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

مفهوم أساسي — الاحتمال والمساحة

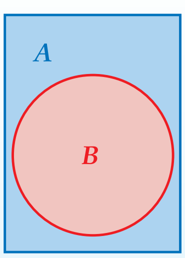
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A ، فإن:

P (وقوع النقطة E في الدائرة B) $= \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$



وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة .
- أن احتمال وقوع الهدف في أيِّ مكانٍ من المنطقة متساوٍ .

الربط بالحياة

الهبوط بالمظلات يتطلب جرأة لممارسته؛ حيث يقفز المظلي من ارتفاع 10.000 متر فأكثر. وينقسم إلى: القفز بالمظلة وهو آمن وسهل؛ لأنه تلقائي ولا يستلزم تحكم القافز. والقفز الحرّ وهو للمحترفين، حيث يتحكم القافز بالمظلة في موضع هبوطه.

مثال 3 من واقع الحياة
استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية $2\,\text{m}$ ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار $1\,\text{m}$، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي $1\,\text{m}$، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي $1+1+1$، أو $3\,\text{m}$.

$P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \dfrac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$ احتمال المساحة

$= \dfrac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$ $A=\pi r^2$

$= \dfrac{\pi}{9\pi} = \dfrac{1}{9}$ بسّط

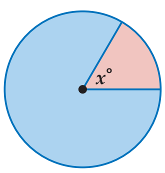
احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$، ويساوي 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **الهبوط بالمظلات:** أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

A) $P(\text{أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء})$

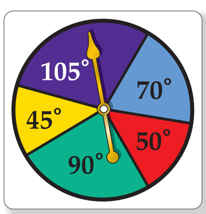
B) $P(\text{أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء})$



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.

إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية $(x°)$ إلى $360°$. (ستبرهن هذا في السؤال 21)، وعليه فإنه إذا اخترت نقطة عشوائيًّا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع يساوي $\frac{x}{360}$

مثال 4
استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) $P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر})$

قياس زاوية القطاع الأصفر $45°$

$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \dfrac{45}{360} \approx 12.5\%$

b) $P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي})$

قياس زاوية القطاع البنفسجي $105°$

$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \dfrac{105}{360} \approx 29\%$

c) $P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق})$

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50° + 70° = 120°$

$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \dfrac{360-120}{360} = \dfrac{240}{360} \approx 67\%$

إرشادات للدراسة

استعمال التقدير

في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص؛ لذا فالجواب 29% يكون معقولًا.

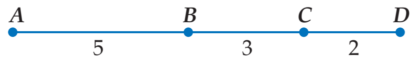
تحقق من فهمك

4A) $P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر})$

4B) $P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأزرق})$

تأكـد

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

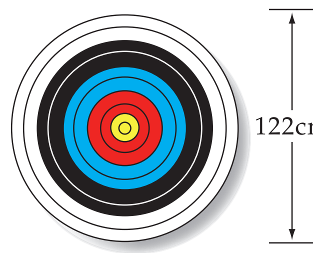


1) $P($أن تقع X على $\overline{BD})$

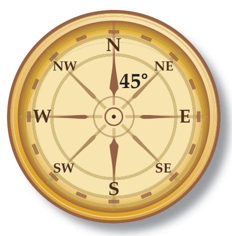
2) $P($أن تقع X على $\overline{BC})$

مثال 2 3) **مواصلات:** ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟

المثالان 3, 4 4) **لعبة السهام:** يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف نقطة داخل الدائرة الصغرى.

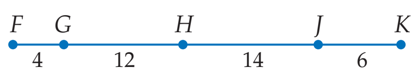


5) **ملاحة:** ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًّا كما في الشكل أدناه. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).



تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{FK}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

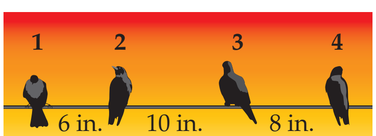


6) $P(X \in \overline{FH})$

7) $P(X \in \overline{GJ})$

8) $P(X \in \overline{HK})$

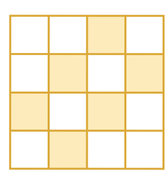
9) **طيور:** تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟



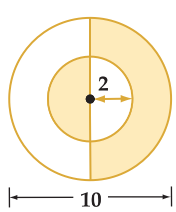
مثال 2 10) **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًّا مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجه المفضّل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مثال 3 اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

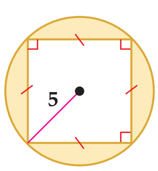
11)



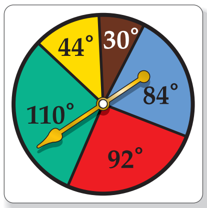
12)



13)



مثال 4 استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):



(14 P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

(15 P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

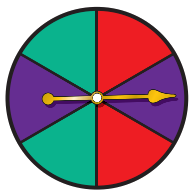
(16 P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

(17 P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)

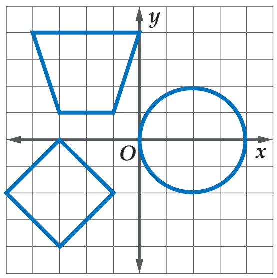
صِفْ حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكلٍّ من النماذج الآتية:

(18

(19



(20 **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا على الشبكة المجاورة، فأوجد كلًّا مما يأتي:



a) P(النقطة داخل الدائرة)

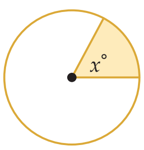
b) P(النقطة داخل شبه المنحرف)

c) P(النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)

الربط بالحياة

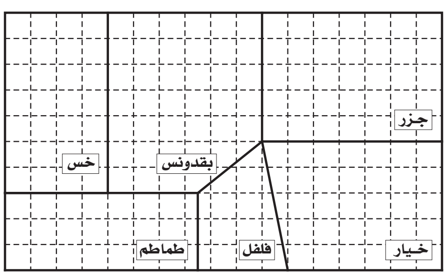
تشجِّع المملكة العربية السعودية الزراعة وتوليها اهتمامًا ودعمًا، حيث تتركز الزراعة على الاكتفاء الذاتي، وتصدير القمح والتمور ومنتجات الألبان والبيض والفواكه والخضراوات والزهور إلى الأسواق في جميع أنحاء العالم.

(21 **جبر:** اختيرت نقطة عشوائيًّا في الدائرة المجاورة. أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$. (إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة × $\frac{x}{360}$)



(22 **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائيًّا في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

(23 **زراعة:** مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل المجاور،

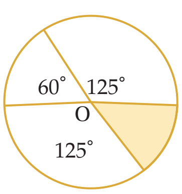


a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟

b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائيًّا لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس.

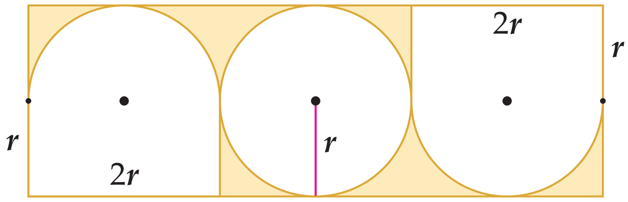
مسائل مهارات التفكير العليا

(24 **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الدائرة O في المنطقة المظللة، أيُّهما حلُّه صحيح؟ وضِّح تبريرك.



سالم	عمر
$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$	$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$
$= \frac{60}{360}$	$= \frac{50}{360}$
$\approx 16.7\%$	$\approx 13.9\%$

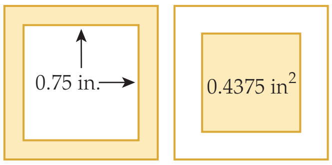
25) **تحدٍّ:** أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقربًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.



26) **تبرير:** محيط مثلَّث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلَّث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضِّح تبريرك.

27) **مسألة مفتوحة:** مثِّل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

28) **اكتب:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من المربعين الآتيين، فوضِّح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أيٍّ منهما.



تدريب على اختبار

29) **احتمال:** رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

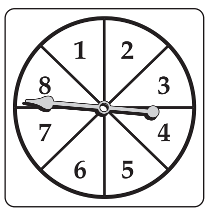
B $\frac{\pi}{9}$ **D** $\frac{9}{\pi}$

30) **احتمال:** يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{7}{18}$

31) **إجابة قصيرة:** قُسِّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًّا؟

مراجعة تراكمية

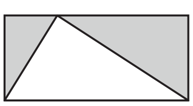
32) **حفلة:** يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-3)

مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 1-3)

33) في كلٍّ من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S).

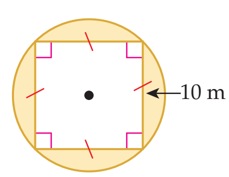
34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B).

35) **هندسة:** في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة)

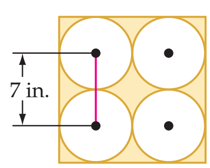


أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

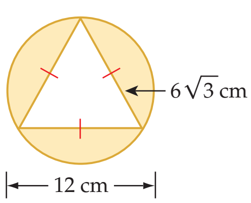
36)



37)



38)



الفصل 3

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-3

1) طعام: يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟

2) أعداد: كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام $2, 3, 4, ..., 9$، دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

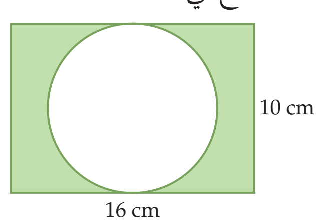
3) ملابس: في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثّل فضاء العيِّنة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذهِ الحروف عشوائيًّا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟

5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟

6) نقود: إذا ألقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟

7) هندسة: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المستطيل في الشكل أدناه، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



8) سيرك: مُدَّ حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْعِ الحبل عند أيٍّ نقطة من نقاطه متساوية.

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه.

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين.

اخيترت نقطة A عشوائيًّا على $\overline{BE}$ في الشكل أدناه. أوجد كلًّا ممّا يأتي:

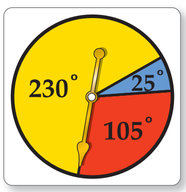
9) P(أن تقع A على $\overline{CD}$)

10) P(أن تقع A على $\overline{BD}$)

11) P(أن تقع A على $\overline{CE}$)

12) P(أن تقع A على $\overline{DE}$)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة، فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى):

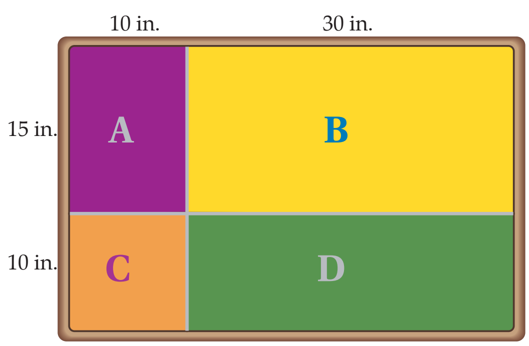


13) P(استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء)

14) P(استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء)

15) P(استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء)

16) لعبة السهام: الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا ووقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



a) المنطقة A؟

b) المنطقة B؟

c) المنطقة C؟

d) المنطقة D؟

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
Probabilities of Independent and Dependent Events

فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة
compound event

الحوادث المستقلة
independent events

الحوادث غير المستقلة
dependent events

الاحتمال المشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

الحادثة المشروطة
conditional event

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفِّه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة
هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلًا عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، فإنّ الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلًا هي حادثة بسيطة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأيِّ حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيِّنة قد نقص واحدًا؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كلٍّ من صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

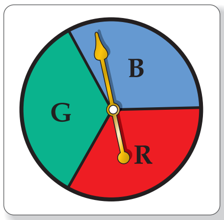
✓ تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.

إذا أُلقيت قطعة نقد وأُدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: $\{(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)\}$.



باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(L) = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{1}{3} \qquad P(L \cap G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضِّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

($\cap$) يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين (وقوع الحادثتين معًا)، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة $P(A \cap B)$: احتمال وقوع A ووقوع B معًا.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة — احتمالات الحوادث المستقلة

وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولًا. افترض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.

السحب 1 — السحب 2

$$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B)$$ احتمال الحادثتين المستقلتين

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$ $P(B) = \frac{3}{8}$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا .

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلّة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

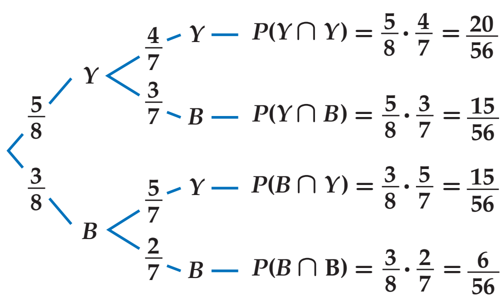
هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

$P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$ احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$ بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق: تحقق من صحّة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب احتمالَي المرحلة الأولى في فروع الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج كما في الشكل أدناه.

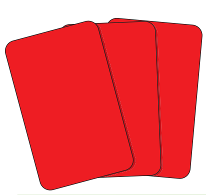


يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \checkmark$$

تحقق من فهمك

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟



تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط

يجب ألّا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

قيم الاحتمال

- لأيِّ حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلًا إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5 ؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العيِّنة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $\{1, 3, 5\}$، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

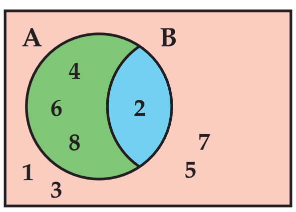
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًّا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2 ارسم شكل ڤن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيِّنة، وواحد منها هو 2 ؛

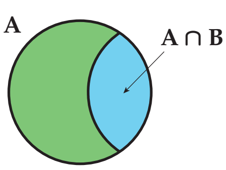
لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B .

تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$

بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل ڤن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث: $P(A) \neq 0$.

سيبرهن هذا القانون في السؤال 16

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط

$P(5 \mid A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

إرشادات للاختبار

أشكال ڤن

استعمل أشكال ڤن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

إرشادات للدراسة

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز $\cap$.

تأكـد

مثال 1 حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1، 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضّح إجابتك:

1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد ، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مثال 2 **3)** **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعِيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

مثال 3 **4)** **أوراق نقدية:** في جيب عبد السلام 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، ما احتمال أن يسحب عبد السلام عشوائيًّا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

مثال 4 **5)** **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (6–9) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:

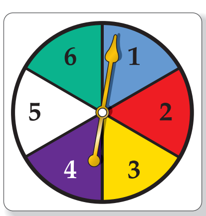
6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.

8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًّا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقِيا مرة واحدة.

10) **ألعاب:** إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟



11) **شعارات:** معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

مثال 4

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

13) مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربَّعًا؟

14) رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أنه استقر عند عدد فردي؟

15) **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟

16) **برهان:** استعمل قانون احتمال حادثتين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$

17) **تنس أرضي:** إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%، فأجب عما يأتي:

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج.

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟

الربط بالحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأً مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **اكتشف الخطأ:** أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$، والحادثتان A و B مستقلتان. أيُّهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

مهند	جابر
بما أن A و B حادثتان مستقلتان، فإن: $P(A\|B) = P(A)$	بما أننا لا نعرف $P(A \cap B)$، فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A\|B)$

19) **تحدٍّ:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n؟ وضِّح إجابتك.

20) **تبرير:** إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برّر إجابتك.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرّر إجابتك.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

A $\frac{1}{18}$ **C** $\frac{1}{9}$

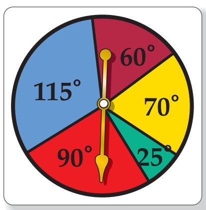
B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{2}$

24) **احتمال:** يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشرٍ.

مراجعة تراكمية

25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقّم أُلقي مرتين؟ (الدرس 3-4)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خطٍّ بين لونين): الدرس (3-3)



26) P(استقرار المؤشر عند اللون الأحمر)

27) P(استقرار المؤشر عند اللون الأزرق)

28) P(استقرار المؤشر عند اللون الأخضر)

29) P(استقرار المؤشر عند اللون الأصفر)

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: (الدرس 3-1)

30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع مختلفة من الحلوى.

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها.

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقّمة في آنٍ واحد.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-5 احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. الدرس (3-4)

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:

الحادثتان المتنافيتان
mutually exclusive events

الحادثة المتممة
complement event

لماذا؟

يمكن لأيِّ طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشُّح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الحوادث المتنافية: لقد اختبرت في الدرس 3-4 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$P(A \cup B)$	$P(A \cap B)$
↑	↑
يدل على اتحاد مجموعتين	يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أيْ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد

اتحاد مجموعتين هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو إلى المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز $\cup$.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟".

a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.

هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

تحقق من فهمك

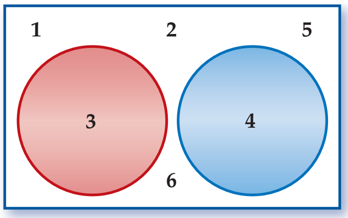
حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًّا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.

فمثلًا لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقّم، سترى من أشكال فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن:



$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالَي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(3) = \frac{1}{6} \text{ و } P(4) = \frac{1}{6}$$

يوضِّح هذا المثال القانون الأول من قانونيَ الجمع في الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

$(\cup)$ يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \cup B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B.

مفهوم أساسي — احتمال الحادثتين المتنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍّ منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أيّ عدد من الحوادث المتنافية.

مثال 2 من واقع الحياة — الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًا أو فيزيائيًّا؟

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينيًّا أوفيزيائيًّا في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني.
وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي.
مجموع الكتب هو $35 = 10 + 12 + 13$.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$$ احتمال الحادثتين المتنافيتين

$$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$$ $P(A1) = \frac{10}{35}$ و $P(A2) = \frac{12}{35}$

$$= \frac{22}{35}$$ اجمع

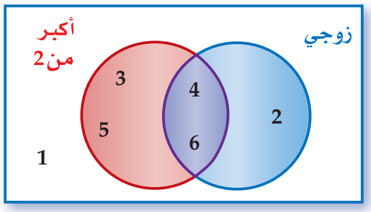
لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$، ويساوي 63% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهَي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

2B) **ألعاب:** إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟

عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5,6 . لذا فإن:



$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من } 2) = \frac{4}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من } 2) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من } 2) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من } 2)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير متنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الربط بالحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذّب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

مثال 3 من واقع الحياة — الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًا للمشاركة في معرض للوحات الفنيّة، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًا؟

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي}) = P(\text{منظر طبيعي}) + P(\text{لوحة زيتية}) - P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي})$$

عوّض $= \dfrac{5+3+2+0}{30} + \dfrac{1+3+2}{30} - \dfrac{3}{30}$

بسّط $= \dfrac{10}{30} + \dfrac{6}{30} - \dfrac{3}{30} = \dfrac{13}{30}$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **فن:** في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًا؟

احتمال الحادثة المتممة: عناصر الحادثة المتممة A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحادثة A. فمثلًا تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: $1, 2, 3, 5, 6$. لذا فإن $\frac{5}{6}=$ (عدم الحصول على العدد 4)P.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1-\frac{1}{6}$ أو $1-P(4)$.

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز (A').

مفهوم أساسي — احتمال الحادثة المتممة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأيّ حادثة A، $P(A') = 1 - P(A)$

مثال 4 — الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًّا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A.

$P(A') = 1 - P(A)$ احتمال المتممة

$= 1 - \frac{20}{300}$ عوّض

$= \frac{280}{300}$ اطرح و بسّط

$= \frac{14}{15}$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **أمطار:** إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

ملخص المفاهيم — قوانين الاحتمال

أضف إلى مطويتك

نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A, B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما.	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأيّ حادثة A: $P(A') = 1 - P(A)$

مثال 5 من واقع الحياة **تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها**

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم: تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد (الأول لا يستعمل الحزام ∪ الثاني لا يستعمل الحزام) P

خطط: الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافرض أن الحادثة B تمثّل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)']$ وهي تكافئ $P(A' \cup B')$

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

حُلّ:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	احتمال الحادثتين غير المستقلتين
$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$	$P(A) = \frac{81}{100}$
$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$	اضرب
$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$	احتمال الحادثة المتممة
$= 1 - \frac{36}{55}$	عوّض
$= \frac{19}{55}$	اطرح

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

تحقق: استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي (100 − 81)%، أو 19% واحتمال اختيار سائقين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن 35% > 19% ، فإن الإجابة معقولة.

✓ تحقق من فهمك

5) **هواتف نقالة:** أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقّال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقّال أثناء القيادة؟

الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط بالحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

تقاطع الحوادث واتحادها

من المثال 5 لاحظ أن

$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$

وبالمثل

$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وبرّر إجابتك:

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة.
2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2
3) **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب ، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتابًا، أو ساعة؟

مثال 3
4) **نشاطات مدرسية :** بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضي	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4
5) **لعبة السهام:** إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

مثال 5
6) **تخرج:** عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي %91 منهم. إذا اختير طالبان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 9-7)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا:

7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.
8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3 .
9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.
10) **رياضة :** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	السباحة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

11) **هدايا :** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و 4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

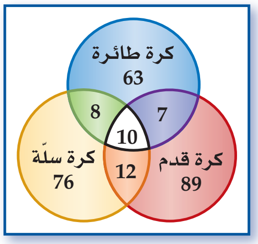
مثال 4 أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.
13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألَّا يسحب الكرة الحمراء؟

مثال 5
15) **أجور:** من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعيًّا تساوي %71. فإذا اختير اثنان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعيًّا؟

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة عددها 100شخص، فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟

17) **مسح:** أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 طالبًا لمعرفة أيِّ الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومُثّلت النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور. إذا اختير طالب عشوائيًّا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي:



a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة.

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولايرغبون المشاركة في كرة السلة.

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدٍّ:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقّمة متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: حدد إذا كانت الحادثتان في كلٍّ مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:

19) اختيار مثلّث متطابق الأضلاع ومثلّث متطابق الزاويا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 **B** 0.35 **C** 0.5 **D** 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{5}{6}$

D 1

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ثمّ أوجد الاحتمال: (الدرس 4 -3)

25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعبٍ مرقّمٍ، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية.

26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة.

27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقّم وثلاث قطع نقد. (الدرس 1 -3)

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيّنة (الدرس 1-3)

- فضاء العيّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيّنة باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-3)

- الترتيب مهم في التباديل.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-3)

- إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائيًا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 4-3 و 5-3)

- إذا كانت الحادثة A' متممة للحادثة A فإن:
$P(A') = 1 - P(A)$
- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B ، فإن الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

المطويات منظم أفكار

تأكدن أن المفاهيم الأساسية قد دوِّنت في مطويتك.

المفردات

- **فضاء العيّنة** ص 114
- **الرسم الشجري** ص 114
- **تجربة ذات مرحلتين** ص 115
- **تجربة متعددة المراحل** ص 115
- **مبدأ العد الأساسي** ص 116
- **المضروب** ص 120
- **التباديل** ص 121
- **التباديل الدائرية** ص 122
- **التوافيق** ص 123
- **الاحتمال الهندسي** ص 127
- **الحادثة المركبة** ص 134
- **الحوادث المستقلة** ص 134
- **الحوادث غير المستقلة** ص 134
- **الاحتمال المشروط** ص 136
- **شجرة الاحتمال** ص 136
- **الحادثة المشروطة** ص 137
- **الحوادث المتنافية** ص 141
- **الحادثة المتممة** ص 144

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد تراتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة.

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة .

8) الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو:
$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

مراجعة الدروس

3-1 تمثيل فضاء العيّنة ص 119–114

10) فشار: يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أوحجم وسط (M) أوحجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثّل فضاء العيِّنة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

11) أحذية: يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، وبلونين: بني أو أسود. فكم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟

مثال 1

أُلقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة.

أقرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالنواتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 126–120

12) مطعم: ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أيّ طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد التراتيب الممكنة؟

13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن، بحيث يتم اختيارهن عشوائيًّا من المجموعة. فما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟

14) مسابقات: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

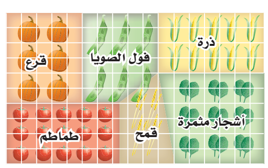
بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

$(n-1)!$	قانون التباديل الدائرية
$(4-1)!$	$n = 4$
$= 3! = 6$	بسِّط

لذا فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

3-3 الاحتمال الهندسي ص 132–127

15) زراعة: الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:



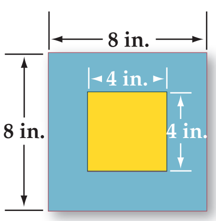
a) ما المساحة التقريبية لحقلَي فول الصويا والذرة معًا؟

b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًّا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة.

16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة، بحيث يجلس هاني على بُعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بُعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر.

مثال 3

لعبة رمي الكرة:



a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $16 = 4 \cdot 4$

$P(\text{أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء}) = \frac{16}{64} = 25\%$

b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $48 = 64 - 16 = 16 - (8 \cdot 8)$

$P(\text{ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء}) = \frac{48}{64} = 75\%$

دليل الدراسة والمراجعة

3-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 140–134

17) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت كرتان على التوالي دون ارجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء؟

18) **مسح:** أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الشخصان من الذين يحبون المطالعة؟

مثال 4

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت كرتان على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحادثتين غير مستقلتين، ويتم حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$P(\text{حمراء وزرقاء}) = P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء\textbackslash حمراء})$

$= \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10}$

$= \frac{9}{55} \approx 16.36\%$

3-5 احتمالات الحوادث المتنافية ص 147–141

19) رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟

20) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقّمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًّا.

a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا أو أقل من 5؟

b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 5

عند إلقاء مكعبين مرقَّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5 .

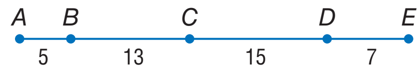
$P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{متساويان})$

$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$

$= \frac{5}{18} \approx 27.8\%$

اختبار الفصل

إذا اخترت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AE}$ في الشكل أدناه. فأوجد كلًّا مما يأتي:



1) $P($ أن تقع X على $\overline{AC}$ $)$

2) $P($ أن تقع X على $\overline{CD}$ $)$

3) **سباحة:** يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟

4) **سفر:** يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدّها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟

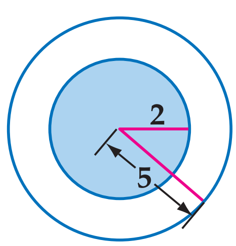
مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

5) يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

6) **مطعم:** أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجبن (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

7) **كتابة:** بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟

8) **تصويب:** يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟

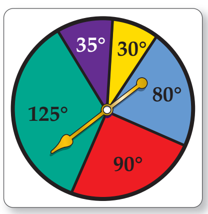


9) **أعداد:** ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية $7, 7, 7, 7, 2, 2, 6$ هو 6222777؟

10) **مسابقات:** اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المتسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟

11) حدد إذا كانت الحادثتان الآتيتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال: سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحتوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و 5 برتقالية مع الإرجاع.

استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خطٍّ تُعاد التجربة).



12) P (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

13) P (استقرار المؤشر على اللون الأحمر)

14) P (استقرار المؤشر على لون غير الأصفر)

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

15) يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

16) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، وظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

17) سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

الإعداد للاختبارات المعيارية

تنظيم البيانات

تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها؛ لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة ممَّا يأتي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات مثل: التمثيل بالأعمدة، أشكال ڤن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق وطرفيه لتنظيمها.

الخطوة 2

نظِّم البيانات.

- كوّن جدولًا، أو قائمة، أو تمثيلًا بيانيًّا، أو أشكال ڤن.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكنًا.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحدد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة، وحُلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافيًا فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

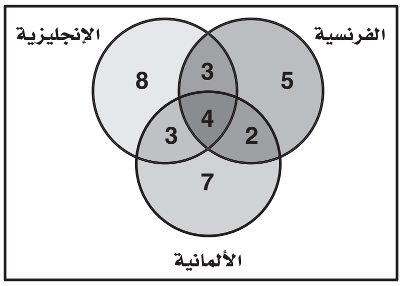
مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالبًا يتعلمون اللغة الإنجليزية، و14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط، و7 يتعلمون الألمانية فقط، و3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط، و4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معًا. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

A $\frac{9}{16}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{5}{18}$ D $\frac{7}{12}$

اقرأ المسألة بتمعُّن تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك أشكال فن تستطيع تنظيم البيانات، وعندئذٍ تتمكن من حلِّها.



الخطوة 1: ارسم ثلاث دوائر تمثل كلٌّ منها لغة.

الخطوة 2: ضع معطيات المسألة على الشكل.

الخطوة 3: املأ القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلًا تعلم أن 18 طالبًا يتعلمون الإنجليزية، و14 طالبًا يتعلمون الفرنسية.
$14 - 3 - 4 - 2 = 5$ (يتعلمون الفرنسية فقط).
$18 - 8 - 3 - 4 = 3$ (يتعلمون الإنجليزية والألمانية فقط).

الخطوة 4: حل المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًا يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلّم الفرنسية. يمكنك بحسب أشكال فن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم:
$18 = 7 + 3 + 8$ يتعلمون الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلمون الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ ؛ لذا فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة وحدّد المطلوب، ثم نظِّم البيانات لحل المسألة.

1) لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: ا، ف، ح، ت. إذا اختارت تبديلًا عشوائيًّا لهذه الأحرف، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟

A $\frac{3}{50}$ C $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{24}$ D $\frac{1}{4}$

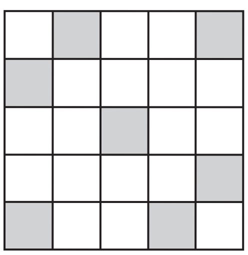
2) يبيّن الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية ، وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

A $\frac{4}{21}$ C $\frac{5}{17}$

B $\frac{2}{25}$ D $\frac{13}{25}$

3) اختيرت نقطة واحدة عشوائيًّا في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظلّلة.



A 0.22 C 0.28

B 0.25 D 0.32

4) تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و9 من الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و6 النشاط الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي و5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير طالب واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟

A $\frac{1}{5}$ C $\frac{5}{9}$

B $\frac{4}{18}$ D $\frac{2}{3}$

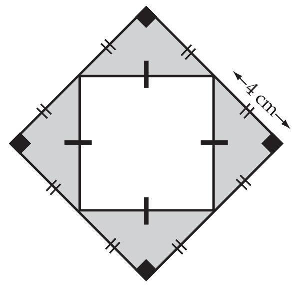
الفصل 3

اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) اختيرت نقطة عشوائيًا في الشكل المجاور، فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة ؟



A 0.0625

B 0.125

C 0.25

D 0.5

2) كم عددًا مكونًا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2,6,1 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

A 3 **C** 12

B 6 **D** 27

3) إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين في فضاء العيّنة لتجربة عشوائية ما، وكان $P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(B)=\frac{1}{2}$، فما قيمة $P(A \cup B)$؟

A 0 **C** $\frac{5}{6}$

B $\frac{2}{5}$ **D** $\frac{1}{6}$

4) قيمة محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ يساوي:

A -11

B 11

C -1

D 1

5) يكتب المقدار: $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$ في أبسط صورة على النحو:

A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$

B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$

C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة A؟

A 0.8

B 0.2

C 0.16

D -0.2

7) سحبت عينتان عشوائيًا واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A ، و3 عينات من فصيلة الدم B ، و6 عينات من فصيلة الدم AB ، و5 عينات من فصيلة الدم O ، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟

A $\frac{1}{51}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{5}{51}$

D $\frac{1}{3}$

إجابة قصيرة

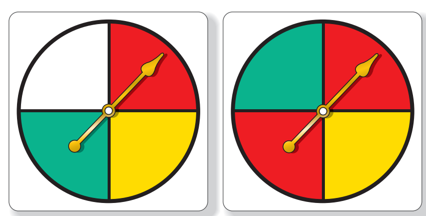
أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحبًا يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالًا؟
دلال: نعم، رزقني الله طفلين.
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟
دلال: نعم.
اعتمادًا على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟

9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$ ، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟

10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علمًا بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أيٌّ من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام فإنه يعاد تدويرهما.



11) حدِّد كلًّا من مجال الدالّة $f(x) = [x] - 5$ ومداها.

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحا خطوات الحل:

12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء وبطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بنّية و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا وسُجِّلَ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسحبت بطاقة أخرى.

a) هل الحادثتان مستقلتان أم غير مستقلتين؟ وضّح إجابتك.

b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟

c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بنيّة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-1	3-5	2-2	1-2	3-5	3-4	3-4	مهارة سابقة	3-4	مهارة سابقة	3-4

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

الفصل 4

حساب المثلَّثات
Trigonometry

فيما سبق:

درست تحليل الدوالّ وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أجد قيم دوالّ مثلَّثية.
- أحلُّ مسائل باستعمال النسب المثلَّثية للمثلَّث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيوب التمام في حلِّ المثلَّث.
- أمثّل دوالّ مثلَّثية بيانيًا.

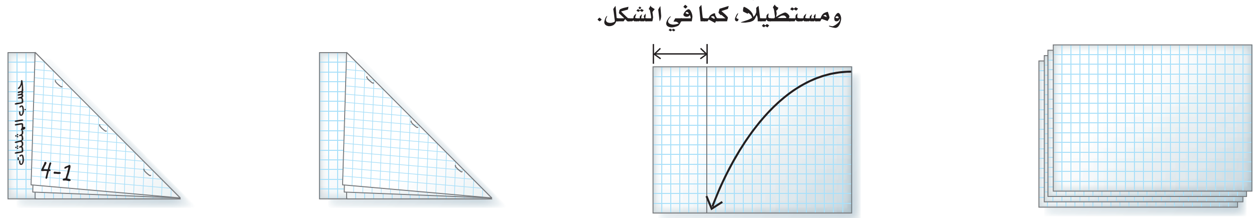
لماذا؟

القياس غير المباشر: للدوالّ المثلَّثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلًا يمكن استعمال النسب المثلَّثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البُعد بين جبلين أو عرض نهر.

المطويات منظم أفكار

حساب المثلَّثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلَّثات، مبتدئًا بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

1. **جمِّع** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض.
2. **اطوِ** الطرف العلوي للأوراق بحيث ينطبق على الحافة السفلية مكوّنًا مثلثًا ومستطيلًا، كما في الشكل.
3. **ثبِّت** الأوراق على طول خطِّ الطيِّ لتشكِّل كتيبًا.
4. **عنوِن** المستطيل بحساب المثلثات، ورقِّم الصفحات بأرقام الدروس.



التهيئة للفصل الرابع

تشخيص الاستعداد:

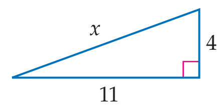
أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

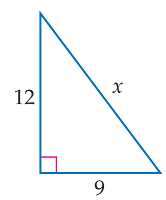
أوجد قيمة x مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

(تستعمل مع الدروس 3-4 إلى 1-4)

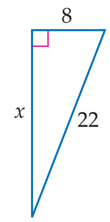
(1



(2



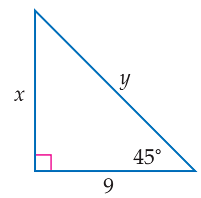
(3



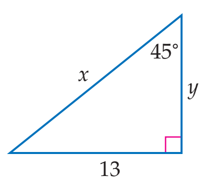
4) حدائق: لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 6m و 4m . يريد أن يرصف ممرًا على قطر الحديقة. فكم سيكون طول الممر مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

أوجد القياسين المجهولين في كلٍّ مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة): (تستعمل مع الدرس 1-4)

(5



(6

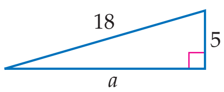


7) سلالم: يستند سُلَّم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية 45°. إذا كان طول السُّلَّم 12 ft، فأوجد ارتفاع قمّته عن الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

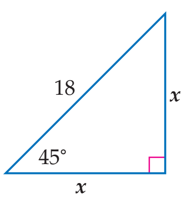
أوجد القياس المجهول في المثلَّث القائم الزاوية أدناه.



$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$18^2 = a^2 + 5^2$	عوِّض عن c بـ 18 و b بـ 5
$324 = a^2 + 25$	بسِّط
$299 = a^2$	اطرح 25 من كلا الطرفين
$17.3 \approx a$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

مثال 2

أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



$x^2 + x^2 = 18^2$	نظرية فيثاغورس
$2x^2 = 18^2$	اجمع الحدود المتشابهة
$2x^2 = 324$	بسِّط
$x^2 = 162$	اقسم كلًّا من الطرفين على 2
$x = \sqrt{162}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين
$x = 9\sqrt{2}$	بسِّط

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

استكشاف **4-1**

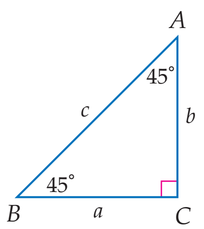
معمل الجداول الإلكترونية

استقصاء المثلَّثات القائمة الخاصة
Investigating Special Right Triangles

الهدف أستعمل الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أضلاع المثلَّثات القائمة الزاوية الخاصة.

يمكنك استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلَّثات القائمة الزاوية الخاصة.

نشاط المثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 45° - 45°$



ضلعا المثلَّث $90° - 45° - 45°$ في الشكل المجاور a, b متساويان.
ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا المثلَّث؟

الخطوة 1: أدخل الصيغ المشار إليها في برنامج الجداول الإلكترونية ، حيث $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2)　=B2/A2　=B2/C2　=A2/C2

45-45-90 triangles

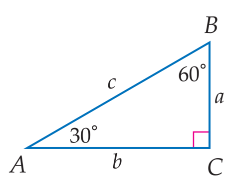
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1　Sheet 2　Sheet 3

الخطوة 2: تحقَّق من النتائج؛ بما أن جميع المثلَّثات التي قياسات زوايا كلٍّ منها $90° - 45° - 45°$ متشابهة، فإن النسب بين أضلاعها تكون ثابتة، وتكون نسبة الضلع b إلى الضلع a مساوية للعدد 1 . ونسبة كلٍّ من الضلعين a, b إلى الضلع c مساوية للعدد 0.71 تقريبًا.

حلّل النموذج:

استعمل برنامج الجداول الإلكترونية المبيَّن أدناه للمثلَّث الذي قياسات زواياه $90° - 60° - 30°$.



30-60-90 triangles

◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1　Sheet 2　Sheet 3

1) انسخ ثم أكمل الورقة الإلكترونية أعلاه.

2) صِفِ العلاقة بين أطوال أضلاع المثلَّث $90° - 60° - 30°$ المُعطاة في الشكل أعلاه.

3) ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا النوع من المثلَّثات؟

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-1

الدوالّ المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية
Trigonometric Functions in Right Triangles

فيما سبق:

درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية. (مهارة سابقة)

والآن:

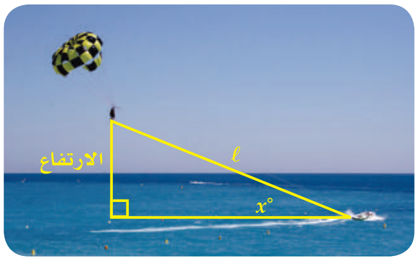
- أجد قيم الدوالّ المثلّثية لزوايا حادّة.
- أستعمل الدوالّ المثلّثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلّثات قائمة الزاوية.

المفردات:

حساب المثلّثات
trigonometry
النسبة المثلّثية
trigonometric ratio
الدالّة المثلّثية
trigonometric function
الجيب
sine
جيب التمام
cosine
الظلّ
tangent
قاطع التمام
cosecant
القاطع
secant
ظلّ التمام
cotangent
دوالّ المقلوب
reciprocal functions
معكوس الجيب
inverse sine
معكوس جيب التمام
inverse cosine
معكوس الظلّ
inverse tangent
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

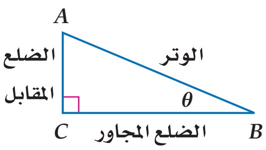
لماذا؟

يعتمد ارتفاع الشخص في التزلُّج الهوائي على طول حبل السحب ℓ والزاوية $x°$ التي يصنعها الحبل مع الخطّ الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلِّج.



الدوالّ المثلّثية للزوايا الحادّة يُعرّف **حساب المثلّثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلّث وأضلاعه. وتقارن **النسبة المثلّثية** بين طولَي ضلعين في المثلّث القائم الزاوية، أمّا **الدالّة المثلّثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلّثية.

يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويُقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادّة في المثلّث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوالّ المثلّثية الستّ.



مفهوم أساسي — جميع الدوالّ المثلّثية في مثلّث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثّل قياس زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، فإنّ الدوالّ المثلّثية الستّ تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\sin\theta$ (جيب θ) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\csc\theta$ (قاطع تمام θ) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

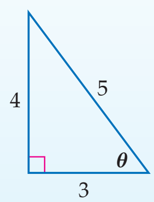
$\cos\theta$ (جيب تمام θ) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\sec\theta$ (قاطع θ) $= \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta$ (ظل θ) $= \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\cot\theta$ (ظل تمام θ) $= \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة:

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

$\csc\theta = \dfrac{5}{4}$ $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$ $\cot\theta = \dfrac{3}{4}$



مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية

إذا كانت θ تمثّل قياس زاوية حادّة في المثلّث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \qquad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8}$$

تحقق من فهمك

1) أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية B الواردة أعلاه.

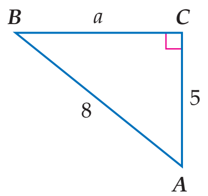
لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظلّ على الترتيب. وتُستعمل في تعريف **دوالّ المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أيِّ دالّة مثلّثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادّة θ في المثلّث القائم الزاوية؛ لذا فإن قيم الدوالّ المثلّثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادّة وليس على أطوال أضلاع المثلّث القائم الزاوية؛ أي أنَّ قيم الدوالّ المثلّثية للزاوية الحادّة ستبقى كما هي مهما اختلفت أطوال أضلاع المثلّث.

مثال 2 إيجاد النسب المثلّثية

$\angle B$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فأوجد قيمة $\tan B$.



الخطوة 1: ارسم مثلّثًا قائم الزاوية وسمِّ إحدى زواياه الحادّة B.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$. فحدِّد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$b = 5,\ c = 8$
$a^2 + 25 = 64$	بسّط
$a^2 = 39$	اطرح 25 من كلا الطرفين
$a = \pm\sqrt{39}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	دالّة الظلّ
$= \frac{5}{\sqrt{39}}$	عوِّض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$
$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$	أنطق المقام

تحقق من فهمك

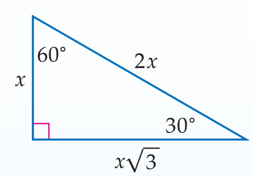
2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فأوجد قيمة $\sin B$.

تتكرّر الزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ كثيرًا في حساب المثلّثات.

مفهوم أساسي بعض قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا الخاصة

أضف إلى مطويتك

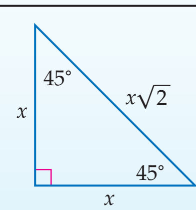
نستنتج من المثلّث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:



$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

نستنتج من المثلّث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:



$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = 1$$

قراءة الرياضيات

تسمية المثلّثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلّث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية، وتتضح دلالة الحرف من السياق.

تاريخ الرياضيات

اكتشف علماء العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلّثات، واستعملوها في حلِّ المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علمًا مستقلًا عن علم الفلك.

ومن أبرز هؤلاء العلماء:

البيروني (أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني(362-439 هـ)).

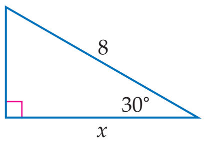
الطوسي (نصر الدين الطوسي(597-672 هـ)).

الكاشي (غياث الدين بن مسعود الكاشي (تُوفي سنة 839 هـ)).

البتاني (ابن عبد الله بن محمد بن سليمان الحراني (235-316 هـ)).

استعمال الدوالّ المثلَّثية : يمكنك استعمال الدوالّ المثلَّثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلَّث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول



استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x ، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية $30°$.

استعمل دالّة جيب التمام لإيجاد قيمة x .

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ دالّة جيب التمام

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ عوّض عن θ بـ $30°$ ، المجاور بـ x، الوتر بـ 8

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

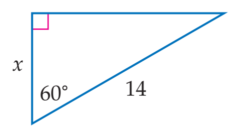
$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ اضرب كلًّا من الطرفين في 8

$6.9 \approx x$ استعمل الآلة الحاسبة

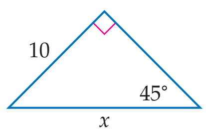
تحقق من فهمك

استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(3A

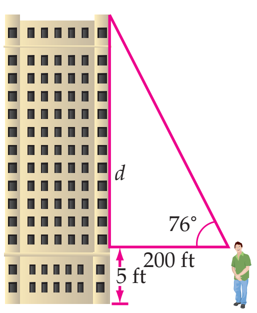


(3B



يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلَّثات التي لا تتضمّن زواياها أيـًّا من الزوايا: $30°, 45°, 60°$.

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول



بناية : لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خطِّ نظره المارّ بقمَّة البناية والخطِّ الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟

الزاوية المقيسة كما يوضِّح الشكل هي $76°$. طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالّة الظل لإيجاد d .

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ دالّة الظلّ

$\tan 76° = \frac{d}{200}$ عوّض عن θ بـ $76°$ ، والمقابل بـ d ، والمجاور بـ 200

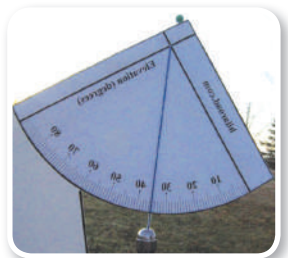
$200 \tan 76° = d$ اضرب الطرفين في 200

$802 \approx d$ استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض ، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريبًا.

إرشادات للدراسة

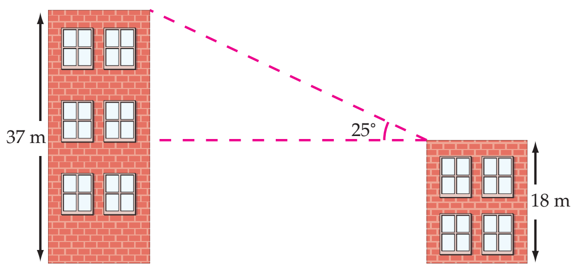
اختيار دالّة
إذا كان طول الوتر مجهولًا فإنه يجب استعمال دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.



الربط بالحياة
مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات. كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

تحقق من فهمك

4) **بنايات:** في الشكل المجاور بنايتان، ارتفاع إحداهما 18 m، وارتفاع الأخرى 37 m، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمّة البناية الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي بين البنايتين والخط المارّ من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو $25°$. فما المسافة الأفقية بين البنايتين؟



عند حلِّ معادلات مثل $3x = -27$، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

مفهوم أساسي — معكوس النسب المثلّثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيبها يساوي x، فإن: **معكوس جيب** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: **معكوس جيب تمام** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادّة وظلّها يساوي x، فإن: **معكوس ظل** x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.

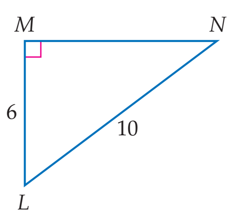
مثال: $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1}\sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

إذا علمت الجيب، أوجيب التمام أوالظل لزاوية حادّة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلّثية المعلومة.

مثال 5 إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كلِّ زاوية مما يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

a) $\angle N$



بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمل دالّة الجيب.

$\sin N = \frac{6}{10}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin^{-1}\frac{6}{10} = m\angle N$ — معكوس الجيب

$36.9° \approx m\angle N$ — استعمل الآلة الحاسبة

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلّثية

تُقرأ العبارة $\sin^{-1} x$ معكوس جيب x، وتعني: الزاوية التي جيبها x، يشبه هذا الرمز رمز الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$. كن حذرًا ولا تخلط هذا الرمز مع رمز الأُسّ السالب: $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

إرشادات للدراسة

استعمال الآلة الحاسبة

لإيجاد $\sin^{-1}\frac{6}{10}$ باستعمال الآلة الحاسبة، اضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب من اليسار إلى اليمين

SHIFT sin (6 ÷ 10) =

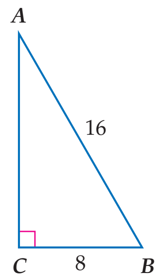
ستحصل على الإجابة $36.9°$، ولإيجاد $\cos^{-1}\frac{8}{16}$ اضغط على المفاتيح

SHIFT cos (8 ÷ 16) =

وستحصل على الإجابة $60°$

$\angle B$ (b

استعمل دالّة جيب التمام.



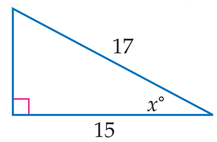
$\cos B = \frac{8}{16}$ — $\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cos^{-1}\frac{8}{16} = m\angle B$ — معكوس جيب التمام

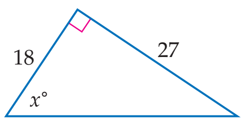
$60° = m\angle B$ — استعمل الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك أوجد قيمة x ، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(5A



(5B

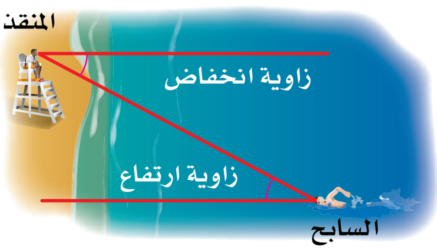


إرشادات للدراسة

زوايا الارتفاع والانخفاض

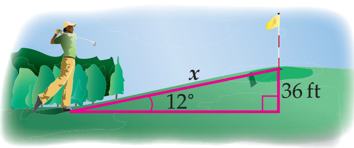
زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان؛ لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين .

في الشكل المجاور، تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر السابح إلى المنقذ والخطِّ الأفقي له **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطِّ نظر المنقذ إلى السابح والخطِّ الأفقي له **زاويةَ الانخفاضِ**.



مثال 6 استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض

a) لعبة الجولف: يقف لاعب جولف أسفل تَلّ، وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التلِّ 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التلِّ عن الحفرة هي 12°، فأوجد المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة.



اكتب معادلة باستعمال دالّة مثلَّثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 12°) إلى المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة (الوتر).

$\sin 12° = \frac{36}{x}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

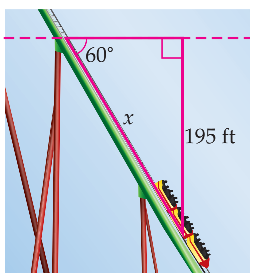
$x \sin 12° = 36$ — اضرب كلًّا من الطرفين في x

$x = \frac{36}{\sin 12°}$ — اقسم كلًّا من الطرفين على $\sin 12°$

$x \approx 173.2$ — استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن المسافة من أسفل التلِّ إلى الحفرة تساوي: 173.2 ft تقريبًا.

b) العربة الدوارة: قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوَّارة في إحدى مدن الألعاب هي 60°. وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.



اكتب معادلة باستعمال دالّة مثلَّثية تتضمّن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 60°) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

$\sin 60° = \frac{195}{x}$ — $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$x \sin 60° = 195$ — اضرب كلًّا من الطرفين في x

$x = \frac{195}{\sin 60°}$ — اقسم كلًّا من الطرفين على $\sin 60°$

$x \approx 225.2$ — استعمل الآلة الحاسبة

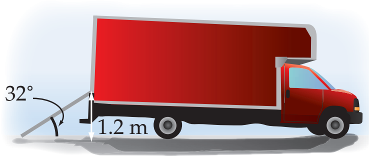
لذا فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 ft تقريبًا.

الربط بالحياة

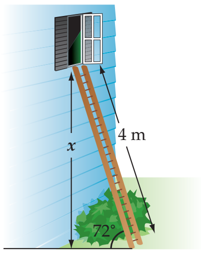
أكثر العربات الدوَّارة انحدارًا في العالم لها زاوية انحدار (انخفاض) تقارب 90° .

تحقق من فهمك

6A) تفريغ حمولة: استُعمِل سطحٌ مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها $32°$. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض $1.2\,m$، فأوجد طول السطح المائل.



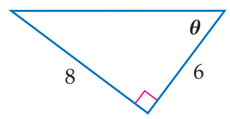
6B) سلالم: سُلَّمٌ طوله $4m$ يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها $72°$. ما ارتفاع قمّة السلّم عن الأرض؟



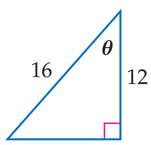
تأكـد

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ الموضّحة في كلٍّ ممّا يأتي:

(1



(2



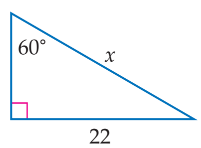
مثال 2 معتبرًا $\angle A$ زاوية حادّة في مثلّث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

(3 إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$؟

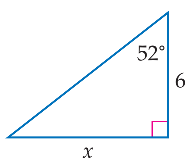
(4 إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$، فما قيمة $\cos A$؟

مثال 3 استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

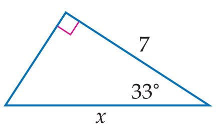
(5



(6

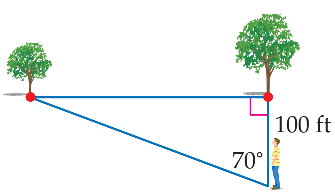


(7



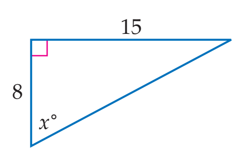
مثال 4

(8 أشجار: يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرَّك مبتعدًا عن مكانه مسافة $100\,ft$، في مسار عموديّ على الخطّ الواصل بين الشجرتين، ومشكّلًا معهما زاوية قياسها $70°$ ، فما البُعد بين الشجرتين؟

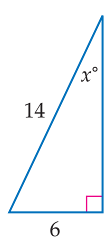


مثال 5 أوجد قيمة x، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

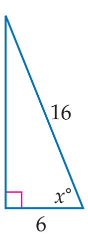
(9



(10



(11



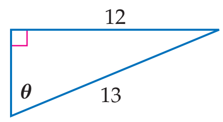
مثال 6

(12 سلالم: إذا علمت أنّ زاوية ارتفاع السلالم المُوصَى بها لمكافحة الحرائق هي $75°$، فإلى أيّ ارتفاع على بناية يمكن أن يصل سُلّم طوله $6.5\,m$، إذا تمَّ الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

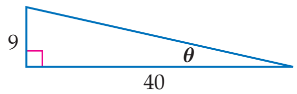
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ الموضَّحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

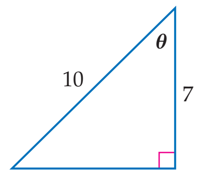
(13



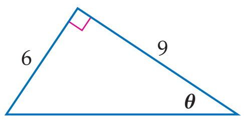
(14



(15



(16



مثال 2 إذا علمت أن $\angle B$ ، $\angle A$ زاويتان حادّتان في مثلَّث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

(17 إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$، فما قيمة $\cos A$؟

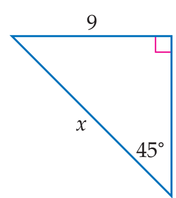
(18 إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$، فما قيمة $\tan A$؟

(19 إذا كان $\tan B = 3$، فما قيمة $\sin B$؟

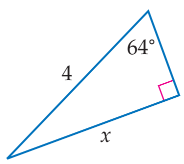
(20 إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$؟

المثالان 3, 4 في كلٍّ ممَّا يأتي، استعمل دالّة مثلَّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

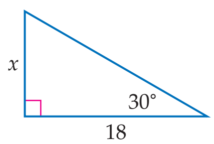
(21



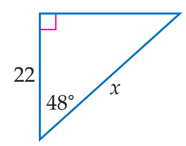
(22



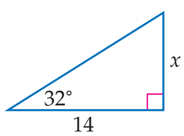
(23



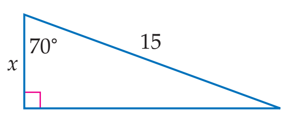
(24



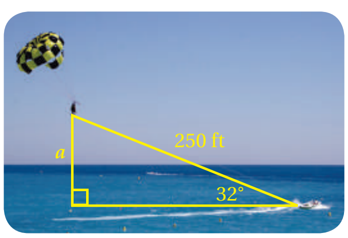
(25



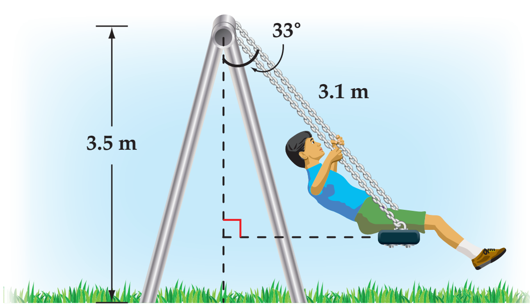
(26



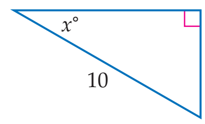
(27 **تزلُّج هوائي:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، واستعن بالمثلَّث إلى اليسار في إيجاد قيمة a التي تُمثّل ارتفاع المتزلِّج، إذا كان طول حبل السحب 250 ft، وقياس الزاوية المحصورة بين الحبل والخطّ الأفقي يساوي 32°، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

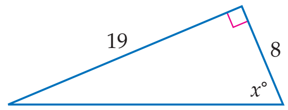


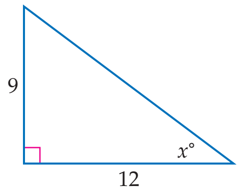
(28 **أرجوحة:** يلعب طفل على أرجوحة في متنزَّه، فإذا كان ارتفاع أعلى الأرجوحة من الأرض 3.5 m، والزاوية التي يصنعها حبل الأرجوحة مع الخطّ العمودي على الأرض في لحظة ما، كما هو مُبيّن في الشكل المجاور، فأوجد ارتفاع مقعد الأرجوحة عن الأرض في تلك اللحظة.

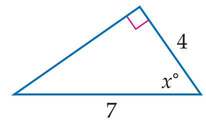


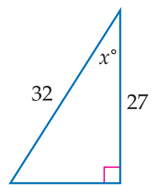
مثال 5 في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد قيمة x، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

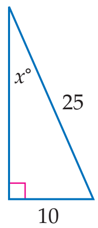
(29


(30


(31


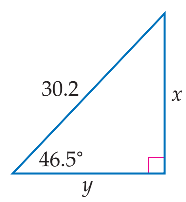
(32


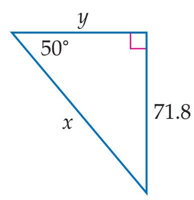
(33


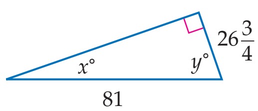
(34


مثال 6 (35 **تسلّق:** تسلّق أحد الأشخاص تلًّا بزاوية ارتفاع قياسها $20°$، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها $18\ m$.

في كلٍّ ممّا يأتي، استعمل دوالّ مثلَّثية، لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(36


(37


(38


حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

(39 $\cos A = \frac{3}{19}$

(40 $\sin N = \frac{9}{11}$

(41 $\tan X = 15$

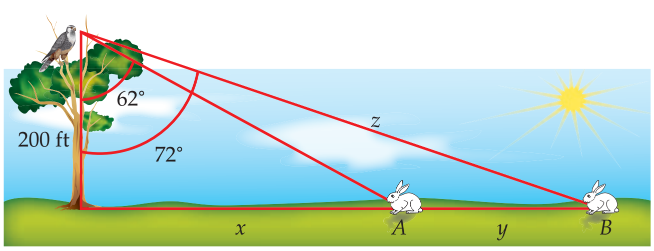
(42 $\sin T = 0.35$

(43 $\tan G = 0.125$

(44 $\cos Z = 0.98$

(45 **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عُشّ طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها $74.5°$، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع $5\ ft$ عن سطح الأرض، وكانت تقف على بُعد $12\ ft$ من قاعدة الشجرة، فما ارتفاع عُشّ الطائر عن سطح الأرض، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟

(46 **صقور:** رأى صقر من ارتفاع $200\ ft$ أرنبين A, B كما هو موضَّح في الشكل.



a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟

b) ما البُعد بين الأرنبين؟

الربط بالحياة

يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها $10\ cm$ من $1.5\ km$، كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقضُّ بسرعة 100 ميل / الساعة.

في $\triangle ABC$، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المُعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

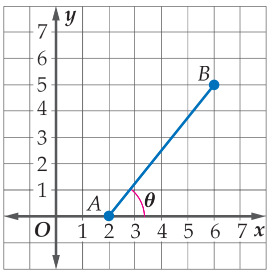
47) $m\angle A = 36°, a = 12$

48) $m\angle B = 31°, b = 19$

49) $a = 8, c = 17$

50) $\tan A = \frac{4}{5},\ a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا



51) **تحدٍّ:** قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0), B(6, 5)$ كما هو موضَّح في الشكل المجاور، ما قياس الزاوية الحادّة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x؟ وضِّح كيف وجدت القياس.

52) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرِّر إجابتك: قيمة دالّة الجيب لأيِّ زاوية حادّة، لن تكون سالبة أبدًا.

53) **إجابة مفتوحة:** في المثلَّث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أنّ: $\sin A = \sin C$، فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلَّث؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

54) إذا كان ثمن شطيرة x ريالًا، وثمن علبة عصير y ريالًا، وثمن شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالات، وثمن ثلاث شطائر مع علبتي عصير 7.25 ريالات، فأيُّ المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

55) نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل $240\ cm^2$، فكم سنتمترًا طول قطر المستطيل؟

A 26

B 28

C 30

D 32

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-1)

56) $\frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

57) $\frac{14c^2f^5}{qa^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

58) $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$

أوجد مجموع حدود كلِّ متسلسلة مما يأتي:

59) $8 + 8 + 13 + \ldots + 58$ (الدرس 2-2)

60) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ (الدرس 2-4)

4-2 الزوايا وقياساتها
Angles and Angle Measure

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات. الدرس (1-4)

والآن:

- أرسم زوايا في الوضع القياسي، وأجد قياساتها.
- أحوّل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات:

الوضع القياسي
standard position

ضلع الابتداء
initial side

ضلع الانتهاء
terminal side

الراديان
radian

الزاوية المركزية
central angle

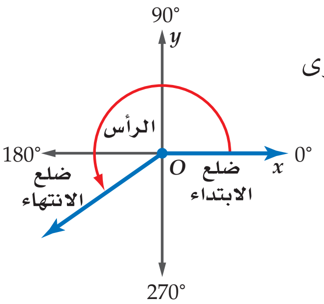
طول القوس
arc length

لماذا؟

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظلّ الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظلّ على القرص $15°$ كلَّ ساعة.

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقًا على الجزء الموجب من المحور x.

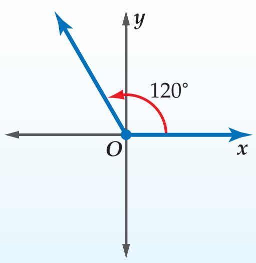
- يُسمّى الضلع المنطبِق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

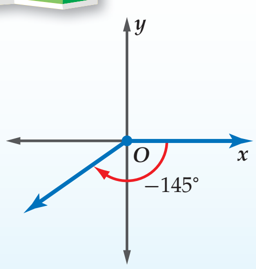


مفهوم أساسي — قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.





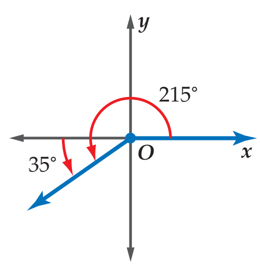
مثال 1 رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًّا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

a) $215°$

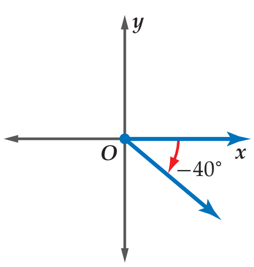
$215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $35°$ بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء السالب من المحور x.



b) $-40°$

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $40°$ بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء الموجب من المحور x.



تحقق من فهمك

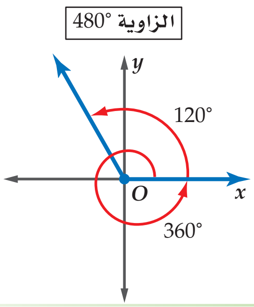
1A) $80°$

1B) $-105°$

يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة.

فعلى سبيل المثال:

دورة كاملة مقدارها $360°$ إضافة إلى دورة بمقدار $120°$ تشكّلان زاوية قياسها $360° + 120° = 480°$



الربط بالحياة

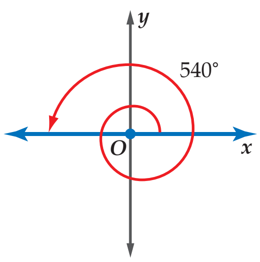
التزلُّج المائي رياضة يضع فيها المتزلّج زلّاجة من الزجاج الليفي، أو من أنواع مختلفة من الخشب في قدميه، ويتم سحبه فوق الماء بواسطة زورق ذي محرّك سريع.

مثال 2 من واقع الحياة — رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلُّج المائي: **يتضمّن التزلُّج المائي أن يقوم المتزلّج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء في أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار $540°$ في الهواء، فارسم زاوية قياسها $540°$ في الوضع القياسي.**

$540° = 360° + 180°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $180°$ بدءًا من الجزء الموجب من المحور x.



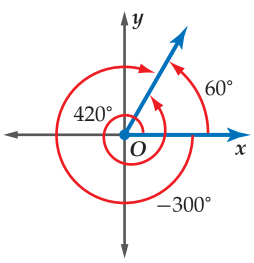
تحقق من فهمك

2) **عجلات:** أوقف سعيد درّاجته، فتحرّكت عجلتاها بزاوية قياسها $600°$، ارسم زاوية قياسها $600°$ في الوضع القياسي.

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: $-300°$, $420°$, $60°$ كما هو موضّح في الشكل المجاور.

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات $360°$.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$



مثال 3 — إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كلٍّ ممّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

a) $130°$

زاوية بقياس موجب: $130° + 360° = 490°$ **أضف $360°$**

زاوية بقياس سالب: $130° - 360° = -230°$ **اطرح $360°$**

b) $-200°$

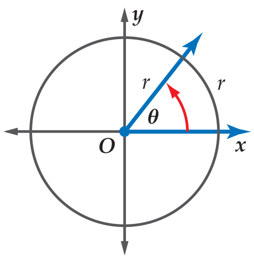
زاوية بقياس موجب: $-200° + 360° = 160°$ **أضف $360°$**

زاوية بقياس سالب: $-200° - 360° = -560°$ **اطرح $360°$**

تحقق من فهمك

3A) $15°$ **3B)** $-45°$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند إلى طول قوس من دائرة. فقياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدّد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة هو 1 **راديان** (rad)



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $360° = 2\pi\,\text{rad}$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$360° = 2\pi\,\text{rad} \quad \text{أي أن} \quad 180° = \pi\,\text{rad}$$

مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\dfrac{\pi\ \text{rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\dfrac{180°}{\pi\ \text{rad}}$

مثال 4 التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

a) $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi\,\text{rad}}{180°}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

b) $\dfrac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\cancel{\pi}}{2}\cancel{\text{rad}} \cdot \frac{180°}{\cancel{\pi\,\text{rad}}}$$

$$= \frac{900°}{2} = 450°$$

✓ **تحقق من فهمك**

4A) $120°$

4B) $-\dfrac{3\pi}{8}$

ملخّص المفهوم — القياس بالدرجات وبالراديان

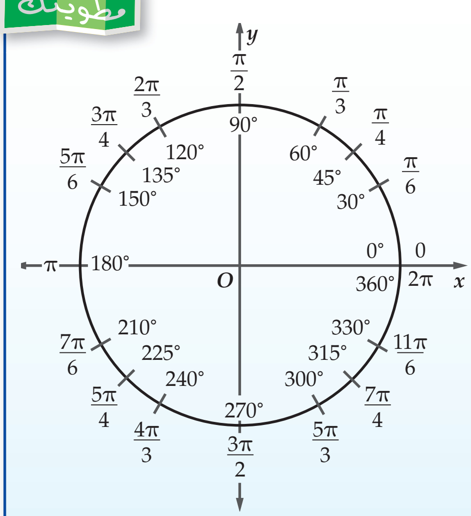
أضف إلى مطويتك

يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصّة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصّة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$45° = \frac{\pi}{4} \qquad 30° = \frac{\pi}{6}$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \qquad 60° = \frac{\pi}{3}$$



إرشادات للدراسة

القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

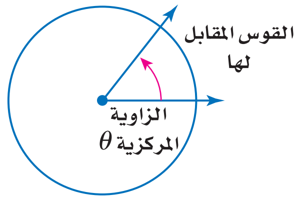
- قياس زاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.
- قياس زاوية بالراديان يكون سالبًا إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

قراءة الرياضيات

القياس بالراديان

كلمة راديان أو rad تُحذف عادة عندما يتمُّ التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس مُعطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.

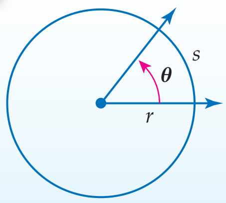


مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$



سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال (48)

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد طول القوس

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in، ما المسافة بالقدم التي يقطعها الإطار بعد أن تدور إطارات الشاحنة ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ — قياس الزاوية هو $\frac{3}{4}$ الدورة الكاملة

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ — صيغة طول القوس

$= 33 \cdot \frac{3\pi}{2}$ — عوّض عن r بـ 33 و θ بـ $\frac{3\pi}{2}$

≈ 155.5 in — استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

≈ 13.0 ft — اقسم على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

إذن إطار الشاحنة قطع مسافة 13 ft تقريبًا بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.

تحقق من فهمك

5) **مطاعم:** يقع في أعلى برج الخرج مطعم دوّار، نصف قطره 90 ft، حيث يدور الجناح المخصّص لتقديم الطعام والقريب من النوافذ الخارجية دورة كاملة كل 90 دقيقة. إذا ذهب شخص للمطعم لتناول العشاء وجلس على طاولة بجانب النافذة عند الساعة 6:42 مساءً وانتهى عند الساعة 8:00 مساءً، فما المسافة التي دارها؟

تنبيه

طول القوس
تذكّر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكّر أيضًا أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تأكـد

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) $140°$ 2) $-60°$ 3) $390°$

مثال 3 في كلٍّ ممّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

4) $25°$ 5) $175°$ 6) $-100°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $\frac{\pi}{4}$ 8) $225°$ 9) $-40°$

مثال 5 (10) **تنس طاولة:** تحرَّك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوسٍ من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي $100°$، فما طول هذا القوس، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

(11 $75°$ **(12** $160°$ **(13** $-90°$

(14 $-120°$ **(15** $295°$ **(16** $510°$

(17 **جمباز:** يتأرجح لاعب جمباز على جهاز له عارضتان، ليدور بزاوية قياسها $240°$. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(18 $50°$ **(19** $95°$ **(20** $205°$

(21 $350°$ **(22** $-80°$ **(23** $-195°$

مثال 4 حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

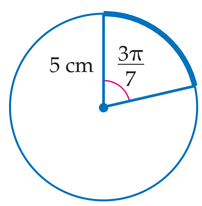
(24 $330°$ **(25** $\frac{5\pi}{6}$ **(26** $-\frac{\pi}{3}$

(27 $-50°$ **(28** $190°$ **(29** $-\frac{7\pi}{3}$

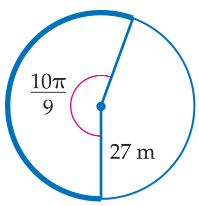
مثال 5 **(30** **رياضة:** درَّاجة ذات عجلة واحدة نصف قطرها 0.8 ft، ما المسافة التي تقطعها العجلة إذا دارت $\frac{1}{4}$ دورة؟

أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(31



(32



(33 **ساعات:** كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزاوية قياسها 2.5π راديان؟

(34 **المزولة:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس، نجد أن الظلّ يدور على القرص $15°$ كلَّ ساعة.

a) بعد كم ساعة يدور الظلُّ بزاوية قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟

b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظلّ بعد مرور 5 ساعات؟

c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظلِّ على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

الربط بالحياة

استُعمِلت المزولة قديمًا في المسجد الأقصى لمعرِفَة أوقات الصلاة.

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(35 $620°$ **(36** $-400°$ **(37** $-\frac{3\pi}{4}$ **(38** $\frac{19\pi}{6}$

(39 **تمثيلات متعدِّدة:** لديك النقطتان $C(6, 0), D(6, 8)$.

a) **هندسيًا:** ارسم المثلَّث $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل.

b) **جبريًا:** أوجد ظلَّ $\angle CED$.

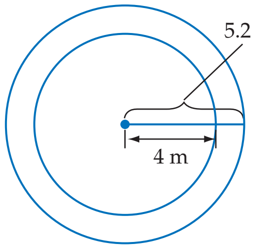
c) **جبريًا:** أوجد ميل $\overline{ED}$.

d) **لفظيًا:** ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظلِّ الزاوية؟

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

(40 $\frac{21\pi}{8}$ (41 $124°$ (42 $-200°$ (43 5

(44 **أحصنة دوَّارة:** في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها $4\,m$، والثانية خارجية طول نصف قطرها $5.2\,m$. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

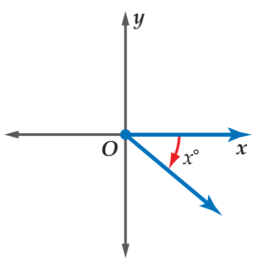


a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة.

b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(45 **اكتشف الخطأ:** كتب كلٌّ من عليٍّ وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.



علي	أحمد
$(x - 360)°$	$(360 - x)°$

(46 **تحدٍّ:** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم.

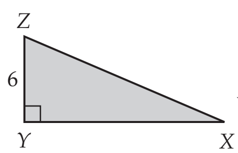
(47 **مسألة مفتوحة:** ارسم زاوية حادّة في الوضع القياسي وسمِّها. وأوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية.

(48 **برهان:** برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية.

تدريب على اختبار

(49 إذا كان $(x+6)(x+8) - (x-7)(x-5) = 0$، فأوجد قيمة x.

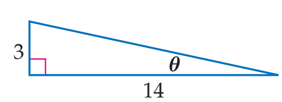
(50 **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلَّث المجاور 60 وحدة مربّعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟

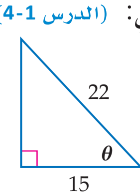


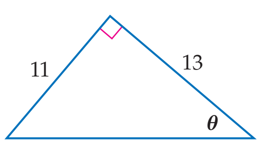
A $2\sqrt{34}$ B $4\sqrt{109}$ C $2\sqrt{109}$ D $4\sqrt{34}$

مراجعة تراكمية

أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 1-4)

(51


(52


(53


حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي: (الدرس 6-1)

(54 $a + 1 = \frac{6}{a}$ (55 $\frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$ (56 $\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلَّثات القائمة الزاوية التي طول كلٍّ من ساقيها كما يأتي: (مهارة سابقة)

(57 $a = 12, b = 15$ (58 $a = 8, b = 17$ (59 $a = 14, b = 11$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

4-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا
Trigonometric Functions of Angles

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الحادّة. الدرس (1-4)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية.
- أجد قيم الدوالّ المثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية.

المفردات:

الزاوية الربعية
quadrantal angle

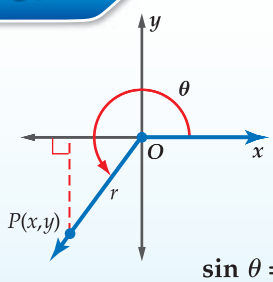
الزاوية المرجعية
reference angle

لماذا؟

تنتشر العجلة الدوّارة في كُبْريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من °90.

الدوالّ المثلَّثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لزوايا قياساتها تزيد على °90 أو تقلُّ عن °0.

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلَّثية للزوايا — أضف إلى



لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثِّل البُعد بين نقطة الأصل والنقطة P.

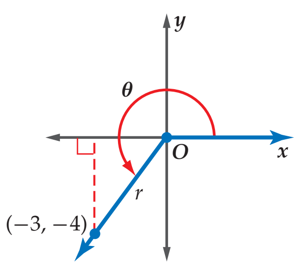
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوالّ المثلَّثية الستُّ للزاوية θ معرَّفة كما يأتي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\quad$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

مثال 1 — إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية بمعلومية نقطة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-3, -4)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.



الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة الدوالّ المثلَّثية الستِّ.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$ $\quad$ $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ $\quad$ $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-6, 2)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ.

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

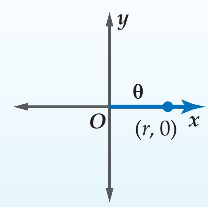
إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية
قياس أيٍّ زاوية ربعية هو من مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

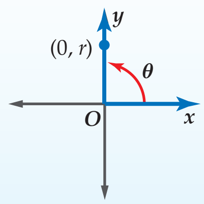
مفهوم أساسي: الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

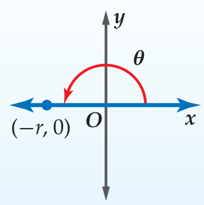
$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$



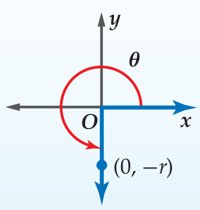
$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad



$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad

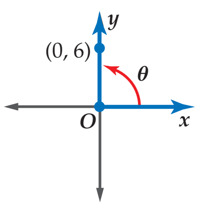


$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad



مثال 2 الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, 6)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ.



تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي $90°$. استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة الدوالّ المثلّثية.

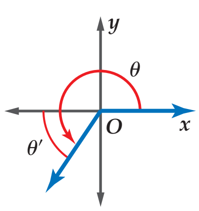
$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ 　 $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$ 　 $\tan \theta = \frac{y}{x} = \cancel{\frac{6}{0}}$ (غير معرَّفة)

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ 　 $\sec \theta = \frac{r}{x} = \cancel{\frac{6}{0}}$ (غير معرَّفة) 　 $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$

تحقق من فهمك

2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-2, 0)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ.

الدوالّ المثلّثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادَّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيِّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



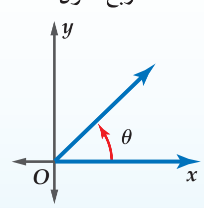
قراءة الرياضيات

الرمز θ'
θ' يُقرأ: ثيتا شرطة.

مفهوم أساسي: الزوايا المرجعية

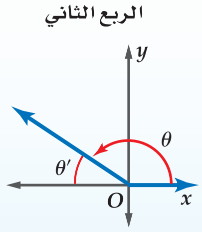
أضف إلى مطويتك

الربع الأول



$\theta' = \theta$

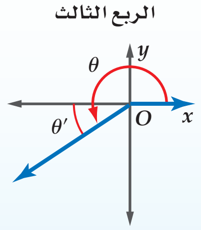
الربع الثاني



$\theta' = 180° - \theta$

$\theta' = \pi - \theta$

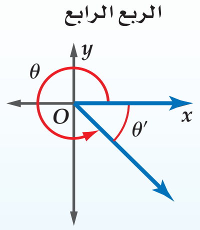
الربع الثالث



$\theta' = \theta - 180°$

$\theta' = \theta - \pi$

الربع الرابع



$\theta' = 360° - \theta$

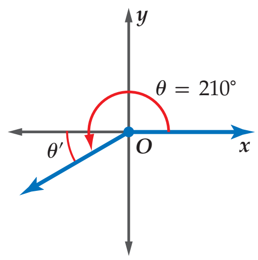
$\theta' = 2\pi - \theta$

لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين $0°, 360°$ ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ.

مثال 3 إيجاد الزوايا المرجعية

ارسم كلًّا من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

a) $210°$

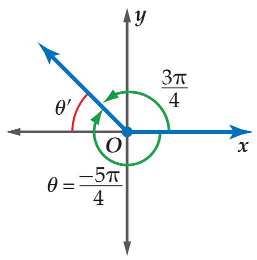


ضلع الانتهاء للزاوية $210°$ يقع في الربع الثالث.

$$\theta' = \theta - 180°$$
$$= 210° - 180° = 30°$$

b) $-\frac{5\pi}{4}$

الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني.

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

✓ تحقق من فهمك

3A) $-110°$ **3B)** $\frac{9\pi}{3}$

لإيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية لأيِّ زاوية θ، يمكنك استعمال الزوايا المرجعية وتُحدِّد إشارة كلِّ دالّة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

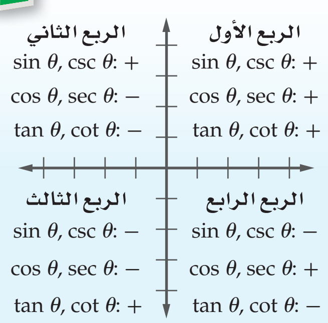
مفهوم أساسي إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدِّد إشارة قيمة الدالّة المثلَّثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ.



يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

قيم الدوالّ المثلَّثية للزوايا الخاصّة					
الجيب	**جيب التمام**	**الظلّ**	**قاطع التمام**	**القاطع**	**ظلّ التمام**
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إرشادات للدراسة

رسم الزوايا في الوضع القياسي

يمكنك الرجوع إلى الشكل الموجود في ملخّص المفهوم في الدرس 2-4؛ لمساعدتك على رسم الزوايا في الوضع القياسي.

إرشادات للدراسة

الدورة الكاملة $[0°, 360°]$

لإيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ، وقياسها موجب محصور بين $0°, 360°$:

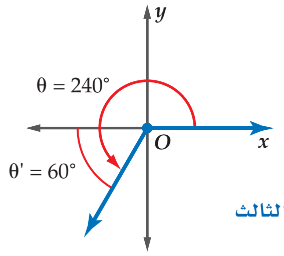
- إذا كانت θ أكبر من $360°$، فاطرح منها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.
- إذا كانت θ أصغر من $0°$، فأضف إليها $360°$ أو أحد مضاعفاتها.

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالّة مثلّثية

أوجد القيمة الدقيقة للدالّة المثلّثية في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\cos 240°$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $240°$ في الربع الثالث.



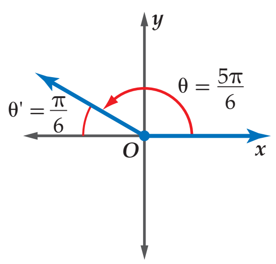
$\theta' = \theta - 180°$ أوجد قياس الزاوية المرجعية

$= 240° - 180° = 60°$ $\theta = 240°$

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ دالّة جيب التمام سالبة في الربع الثالث

b) $\csc \frac{5\pi}{6}$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.



$\theta' = \pi - \theta$ أوجد قياس الزاوية المرجعية

$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$ دالّة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني

$= \csc 30°$ $\frac{\pi}{6}\ \text{rad} = 30°$

$= 2$ $\csc 30° = \frac{1}{\sin 30°}$

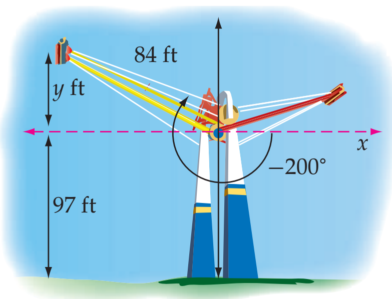
تحقق من فهمك

4A) $\cos 135°$

4B) $\tan \frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من واقع الحياة استعمال الدوالّ المثلّثية

أراجيح: إذا كان طول كلِّ ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft، فأوجد الارتفاع الكليَّ لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضَّح في الشكل.



قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية $-200°$:

$-200° + 360° = 160°$

$180° - 160° = 20°$ قياس الزاوية المرجعية

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ دالّة الجيب

$\sin 20° = \frac{y}{84}$ $\theta = 20°, r = 84$

$84 \sin 20° = y$ اضرب كل من الطرفين في 84

$28.7 \approx y$ استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة y

بما أن y تساوي 28.7 ft تقريبًا، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو $97 + 28.7$ ويساوي 125.7 ft تقريبًا.

الربط بالحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوّارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

تحقق من فهمك

5) **أراجيح:** أوجد الارتفاع الكليّ لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذه الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft، وقياس زاوية الدوران $-195°$

تأكـد

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ :

(1 $(1, 2)$ **(2** $(-8, -15)$ **(3** $(0, -4)$

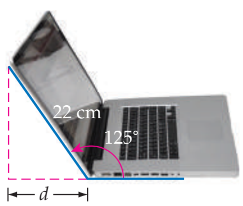
مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(4 $300°$ **(5** $115°$ **(6** $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

(7 $\sin \frac{3\pi}{4}$ **(8** $\tan \frac{5\pi}{3}$ **(9** $\sec 120°$ **(10** $\sin 300°$

مثال 5 **(11** **تقنية :** فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm، فشكّل زاوية قياسها $125°$ كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.



a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثيِّ بحيث تكون الزاوية $125°$ مرسومة في الوضع القياسي.

b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $125°$ ، ثم اكتب دالّة مثلّثية يمكن استعمالها في إيجاد d.

c) استعمل هذه الدالّة، لإيجاد قيمة d، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ.

(12 $(5, 12)$ **(13** $(-6, 8)$ **(14** $(3, 0)$

(15 $(0, -7)$ **(16** $(4, -2)$ **(17** $(-9, -3)$

مثال 3 ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

(18 $195°$ **(19** $285°$ **(20** $-250°$

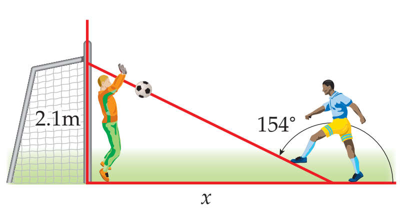
(21 $\frac{7\pi}{4}$ **(22** $-\frac{\pi}{4}$ **(23** $400°$

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

(24 $\sin 210°$ **(25** $\tan 315°$ **(26** $\cos 150°$ **(27** $\csc 225°$

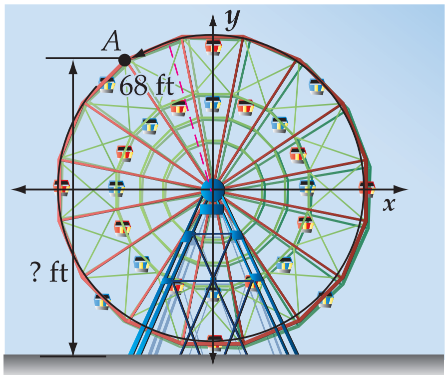
(28 $\sin \frac{4\pi}{3}$ **(29** $\cos \frac{5\pi}{3}$ **(30** $\cot \frac{5\pi}{4}$ **(31** $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5 **(32** **كرة قدم:** يركل لاعبٌ الكرةَ نحو الهدف من مسافة x m عن حارس المرمى كما هو مبيَّن في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.



a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية $154°$. ثم اكتب دالّة مثلّثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟



33) **عجلات دوّارة :** في إحدى مدن الألعاب عجلة دوّارة طول نصف قطرها 68 ft، وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها $202.5°$ عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟

افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وقد أُعطي فيما يأتي قيمة إحدى الدوالّ المثلَّثية للزاوية θ والربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها. أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الخمس الأخرى للزاوية θ.

34) $\sin \theta = \frac{4}{5}$، الربع الثاني

35) $\tan \theta = -\frac{2}{3}$، الربع الرابع

36) $\cos \theta = -\frac{8}{17}$، الربع الثالث

37) $\cot \theta = -\frac{12}{5}$، الربع الرابع

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية فيما يأتي:

38) $\cot 270°$

39) $\csc 180°$

40) $\sin 570°$

41) $\tan \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

42) $\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

43) $\cot \frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **تحدٍّ :** الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساويًا لِـ $225°$؟ وضِّح إجابتك.

45) **تبرير :** حدِّد ما إذا كانت المعادلة: $3 \sin 60° = \sin 180°$ صحيحة أم غير صحيحة. وضِّح إجابتك.

46) **مسألة مفتوحة :** أعطِ مثالًا على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$.

47) **اكتب :** وضِّح خطوات إيجاد قيمة دالّة مثلَّثية لزاوية قياسها أكبر من $90°$. مضمِّنًا ذلك وصفًا للزاوية المرجعية في هذه الخطوات.

تدريب على اختبار

48) إذا كان مجموع عددين 21، والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟

49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$ ؟

A $-12i$ **B** $36 - 12i$ **C** $36 - i$ **D** $35 - 12i$

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كلِّ زاوية مكتوبة بالراديان فيما يأتي إلى الدرجات: (الدرس 4-2)

50) $\frac{4}{3}\pi$

51) $\frac{11}{6}\pi$

52) $-\frac{17}{4}\pi$

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادّة: (الدرس 4-1)

53) $\cos A = \frac{13}{17}$

54) $\sin 30° = \frac{b}{6}$

55) $\tan C = \frac{9}{4}$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 1-6)

56) $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$

57) $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$

58) $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

4-4 قانون الجيوب
Law of Sines

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلّثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها. الدرس (1-4)

والآن:

- أجد مساحة مثلّث باستعمال طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حلِّ المثلّثات.

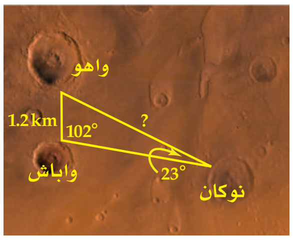
المفردات:

قانون الجيوب
Law of Sines

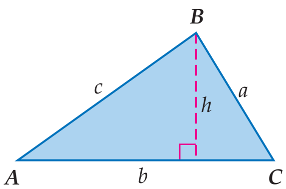
حل المثلّث
solving a triangle

لماذا؟

يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوّهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلِّفي قصص علمية خيالية. والشكل المجاور يبيِّن ثلاثًا من هذه الفوّهات. يمكنك استعمال حساب المثلّثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو ونوكان.



إيجاد مساحة المثلّث: في المثلّث المجاور $\sin A = \frac{h}{c}$ أي أنَّ $h = c \sin A$.



المساحة $= \frac{1}{2}bh$ صيغة مساحة المثلّث

المساحة $= \frac{1}{2}b(c \sin A)$ عوّض عن h بـ $c \sin A$

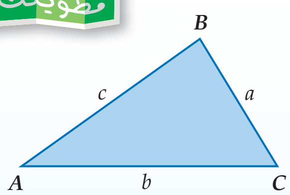
المساحة $= \frac{1}{2}bc \sin A$ بسِّط

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلَّث، إذا كان معلومًا لديك طولا أيِّ ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مفهوم أساسي — مساحة المثلّث

أضف إلى مطويتك

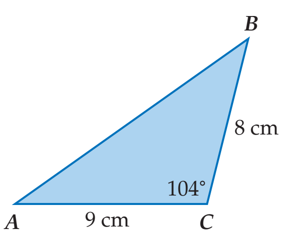
التعبير اللفظي: مساحة المثلّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.



الرموز: $k = \frac{1}{2}bc \sin A$ $\quad k = \frac{1}{2}ac \sin B$ $\quad k = \frac{1}{2}ab \sin C$

مثال 1 — إيجاد مساحة مثلَّث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104°$.

$k = \frac{1}{2}ab \sin C$ صيغة مساحة المثلّث

$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$ عوِّض

≈ 34.9 بسِّط

إذن المساحة تساوي $34.9\,cm^2$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31°$, $b = 18\,m$, $c = 22\,m$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلَّث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبيِّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلَّث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$ اكتب صيغ مساحة المثلَّث الثلاث المتساوية

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$ اضرب كلَّ عبارة في 2

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$ اقسم كلَّ عبارة على abc

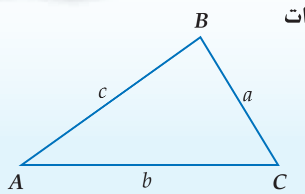
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ بسِّط

مفهوم أساسي — قانون الجيوب

أضف إلى مطويتك

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

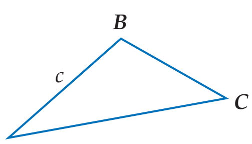
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



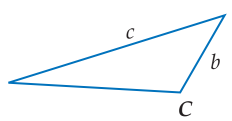
حلُّ المثلَّث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلَّث وقياس زواياه.

ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ المثلَّث في الحالات الآتية:

- معرَّفة قياسي زاويتين في المثلَّث وطول أي ضلع فيه (زاوية – زاوية– ضلع (حالة AAS)، أو زاوية– ضلع– زاوية (حالة ASA))

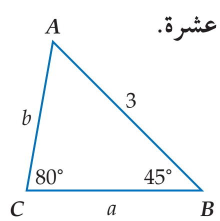


- معرَّفة طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (ضلع– ضلع– زاوية (حالة SSA))



مثال 2 حَلُّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

حُلَّ $\triangle ABC$، الموضَّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180° - (80° + 45°) = 55°$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كلٍّ من الطولين: a, b .
اكتب معادلة لإيجاد قيمة كلٍّ منهما.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الجيوب	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$	عوِّض	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$
$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$	حُلَّ بالنسبة لكلِّ متغيِّر	$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$
$a \approx 2.5$	استعمل الآلة الحاسبة	$b \approx 2.2$

إذن، $A = 55°, a \approx 2.5, b \approx 2.2$.

تحقق من فهمك

2) حُلَّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42°, Q = 65°, n = 5$، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقتين الآتيتين لحلِّ المثلَّث في المثال 2

$$\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

$$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$$

إذا عُلِمَ لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلَّث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلَّثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلَّث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

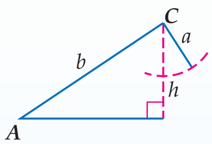
مفهوم أساسي

المثلَّثات الممكنة في حالة (SSA)

أضف إلى مطويتك

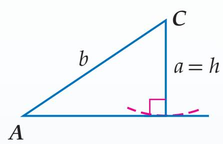
افترض مثلَّثا معلومًا فيه: $m\angle A$, a, b

$\angle A$ حادّة



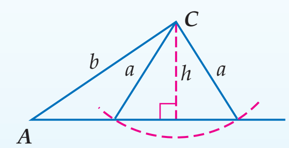
$a < h$

لا يوجد حلٌّ



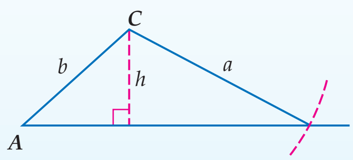
$a = h$

حلٌّ واحد



$h < a < b$

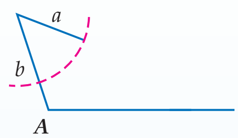
حلّان



$a \geq b$

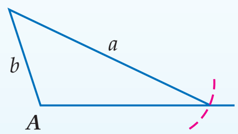
حلٌّ واحد

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$a \leq b$

لا يوجد حلٌّ



$a > b$

حلٌّ واحد

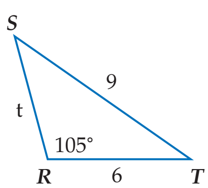
بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلَّثات الحادّة الزوايا.

مثال 3 حَلُّ مثلَّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدِّد إن كان لكلِّ مثلَّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105°, r = 9, s = 6$.

بما أن $\angle R$ منفرجة، و $9 > 6$ ، نستنتج أن للمثلَّث حلًّا واحدًا.



الخطوة 1: ابدأ برسم المثلَّث، ثم استعمل قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.

$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الجيوب

$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$ حُلَّ بالنسبة لـ $\sin S$

$\sin S \approx 0.6440$ استعمل الآلة الحاسبة

$S \approx 40°$ أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$، والزاوية S حادّة

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$.

$$m\angle T \approx 180° - (105° + 40°) \approx 35°$$

الخطوة 3: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة t.

$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الجيوب

$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$ حُلَّ بالنسبة لـ t

$t \approx 5.3$ استعمل الآلة الحاسبة

إذن: $S \approx 40°, T \approx 35°, t \approx 5.3$.

إرشادات للدراسة

الحالة المبهمة

الحالة التي يكون للمثلَّث فيها حلان تُسمَّى الحالة المبهمة.

إرشادات للدراسة

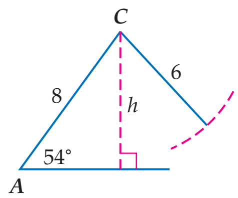
الزاوية A حادّة

في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة، الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بعد من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادّة.

$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin A = \frac{h}{b}$

b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54°, a = 6, b = 8$.



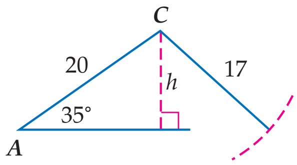
بما أن $\angle A$ حادّة، و $8 > 6$، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a.

$h = b \sin A = 8 \sin 54°$ $b = 8, A = 54°$

≈ 6.5 استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $6 < 6.5$ أو $a < h$ فلا يوجد للمثلَّث حلّ.

c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35°,\ a = 17,\ b = 20$.



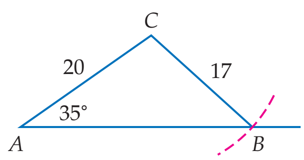
بما أن $\angle A$ حادّة، و $20 > 17$، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a.

$h = b \sin A = 20 \sin 35°$ $b = 20, A = 35°$

≈ 11.5 استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $11.5 < 17 < 20$ أو $h < a < b$. فإن للمثلَّث حلّين، وبالتالي هناك مثلَّثان يطلب حلّهما.

الحالة 1: $\angle B$ حادّة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

$\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الجيوب

$\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$ حُلَّ بالنسبة لـ $\sin B$

$\sin B \approx 0.6748$ استعمل الآلة الحاسبة

$B \approx 42°$ أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6748$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (35° + 42°) \approx 103°$

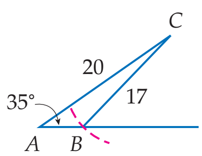
الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 103°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$ حُلَّ بالنسبة لـ c

$c \approx 28.9$ استعمل الآلة الحاسبة

الحالة 2: $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42° \approx 138°$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (35° + 138°) \approx 7°$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 35°}{17}$ قانون الجيوب

$c \approx \frac{17 \sin 7°}{\sin 35°}$ حُلَّ بالنسبة لـ c

$c \approx 3.6$ استعمل الآلة الحاسبة

لذا فإن أحد الحلّين هو: $B \approx 42°, C \approx 103°, c \approx 28.9$، والحلّ الثاني هو: $B \approx 138°, C \approx 7°, c \approx 3.6$.

تحقق من فهمك

حدِّد إن كان لكل مثلَّث مما يأتي حلّ واحد، أم حلَّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95°, r = 10, s = 12$

3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32°, n = 7, p = 4$

3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47°, a = 15, b = 18$

إرشادات للدراسة

حلّان

في الفرع c، بما أن $h < a < b$ فإن للمثلّث حلّين أحدهما عندما تكون الزاوية B حادّة، والآخر عندما تكون الزاوية B منفرجة (مكمّلة للزاوية الحادّة في الحلّ الأول).

إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية

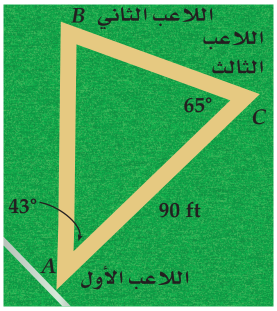
في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها $42°$ لإيجاد القياس الآخر للزاوية B .

🌍 الربط بالحياة

يقع إستاد الملك فهد الدولي بالجهة الشمالية الشرقية من مدينة الرياض على مساحة تبلغ 500,000 متر مربع، ويتكون من مبنى اللاعبين وملعب كرة قدم العشبي وملحقاته الخدمية ومضمار للجري ولألعاب القوى وقناة الحماية والمدرجات ومقاعد الجمهور.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال قانون الجيوب لحل مسألة

كرة قدم: يُمثّل الشكل المجاور إحدى التمريرات الحاسمة بين ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.



$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 72°$	مجموع زوايا المثلَّث °180
$\frac{\sin 72°}{90} = \frac{\sin 43°}{x}$	قانون الجيوب
$x \sin 72° = 90 \sin 43°$	استعمل الضرب التبادلي
$x = \frac{90 \sin 43°}{\sin 72°}$	حُلَّ بالنسبة لـ x
$x \approx 64.5$	استعمل الآلة الحاسبة

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 ft تقريبًا.

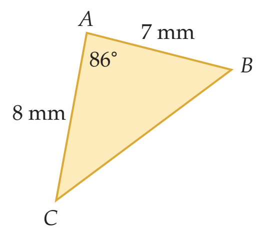
✓ تحقق من فهمك

4) **كرة قدم:** أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني في الشكل أعلاه.

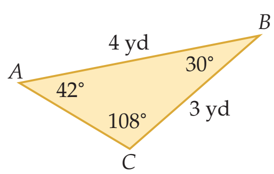
✓ تأكـد

مثال 1 أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

1)



2)

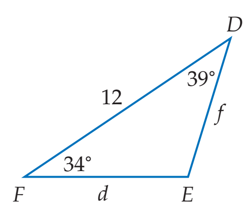


3) $A = 40°, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$

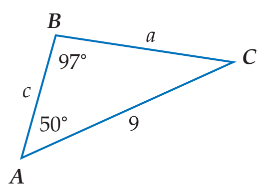
4) $B = 103°, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلَّث مما يأتي، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

5)



6)



7) $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80°, H = 40°, g = 14$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

8) $A = 95°, a = 19, b = 12$

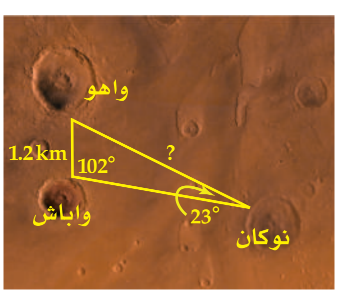
9) $A = 60°, a = 15, b = 24$

10) $A = 34°, a = 8, b = 13$

11) $A = 30°, a = 3, b = 6$

مثال 4

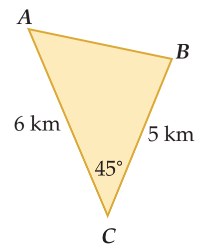
12) **فضاء:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوّهة واهو وفوّهة نوكان.



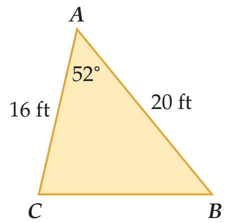
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد مساحة كلٍّ من المثلَّثات الموضَّحة في الأشكال الآتية مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة:

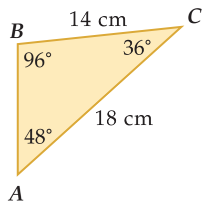
(13



(14



(15



(16 $C = 25°, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$

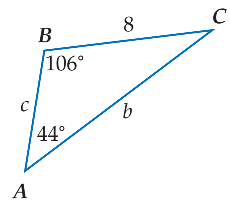
(17 $A = 138°, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$

(18 $B = 92°, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

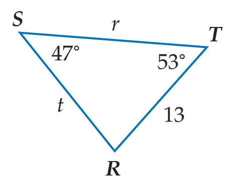
(19 $C = 116°, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$

مثال 2 حُلّ كلَّ مثلَّث ممّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

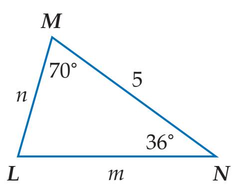
(20



(21



(22



(23 $\triangle HJK$ الذي فيه: $H = 53°, J = 20°, h = 31$.

(24 $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 109°, Q = 57°, n = 22$.

(25 $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 50°, a = 2.5, C = 67°$.

(26 $\triangle ABC$ الذي فيه: $B = 18°, C = 142°, b = 20$.

مثال 3 حدد إن كان للمثلَّث ABC في كلٍّ ممّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(27 $A = 100°, a = 7, b = 3$

(28 $A = 75°, a = 14, b = 11$

(29 $A = 38°, a = 21, b = 18$

(30 $A = 52°, a = 9, b = 20$

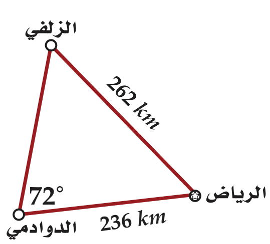
(31 $A = 42°, a = 5, b = 6$

(32 $A = 44°, a = 14, b = 19$

(33 $A = 131°, a = 15, b = 32$

(34 $A = 30°, a = 17, b = 34$

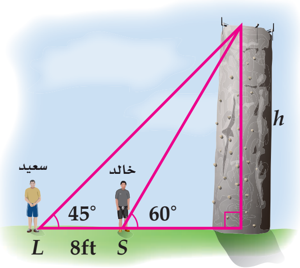
مثال 4 **جغرافيا:** في الشكل المجاور ثلاثة مواقع جغرافية تشكِّل مثلثًا. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوادمي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km ، وقياس الزاوية عند الدوادمي 72° ، فأجب عما يأتي:



(35 أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض.

(36 أوجد المسافة بين الزلفي والدوادمي.

37) **تسلُّق:** يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلُّق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبيّن في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري، مقرّبًا إلى أقرب قدم؟



مسائل مهارات التفكير العليا

38) **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $R = 56°, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

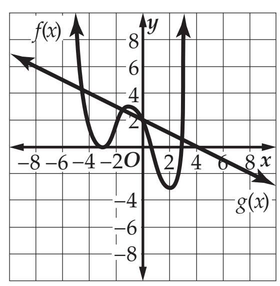
رضوان	علي
$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$ $\sin T \approx 0.4145$ $T \approx 24.5°$	بما أن $r > t$ فلا يوجد للمثلّث حلّ.

39) **تبرير:** أوجد أطوال أضلاع مثلّثين مختلفين ABC، بحيث يكون في كلٍّ منها $C = 20°$، $A = 55°$.

40) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $R = 62°, d = 38$، فأوجد قيمة لِـ r، بحيث لا يوجد للمثلّث DRF حلّ عندها. ووضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

41) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x)$, $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



42) إذا كان أحد أصفار الدالّة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4. فأيٌّ مما يأتي يُمثّل تحليلًا للعبارة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

A $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$

B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$

C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$

D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي: (الدرس 4-3)

43) $\sin 210°$ 44) $\cos \frac{3}{4}\pi$ 45) $\cot 60°$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية مُعطاة: (الدرس 4-2)

46) $125°$ 47) $-32°$ 48) $\frac{2}{3}\pi$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (الدرس 2-4)

49) $64 + 48 + 36 + \dots$ 50) $27 + 36 + 48 + \dots$ 51) $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n$

إذا كانت $w = 6, x = -4, y = 1.5, z = \frac{3}{4}$، فأوجد قيمة كلِّ عبارة ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

52) $w^2 + y^2 - 6xz$ 53) $x^2 + z^2 + 5wy$ 54) $wy + xz + w^2 - x^2$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

توسع 4-4

معمل الهندسة

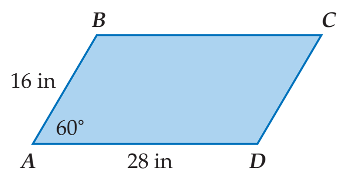
مساحة متوازي الأضلاع
Area of Parallelogram

الهدف أستعمل نسبة الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

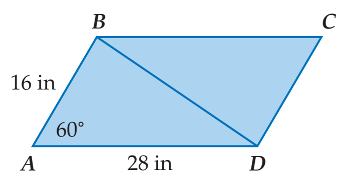
يمكنك إيجاد مساحة أيّ مثلَّث باستعمال الجيب. وكذلك يمكنك استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



الخطوة 1: ارسم القطر $\overline{BD}$.



يقسم القطر $\overline{BD}$ متوازي الأضلاع إلى مثلَّثين متطابقين هما: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

الخطوة 2: أوجد مساحة $\triangle ABD$.

$K = \frac{1}{2}(AB)(AD)\sin A$ صيغة مساحة المثلَّث

$= \frac{1}{2}(16)(28)\sin 60°$ $AB = 16, AD = 28, A = 60°$

$= 224\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اضرب وعوِّض قيمة $\sin 60°$

$= 112\sqrt{3}$ بسِّط

الخطوة 3: أوجد مساحة $\square ABCD$.

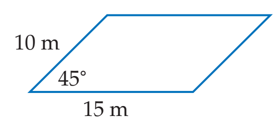
مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتَي المثلَّثين: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

وبما أن $\triangle CDB \cong \triangle ABD$ ، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$.

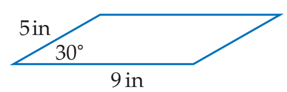
لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلَي مساحة $\triangle ABD$. أي $2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98\ in^2$

تمارين:

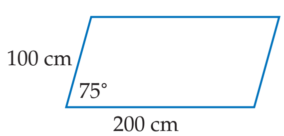
(1



(2



(3



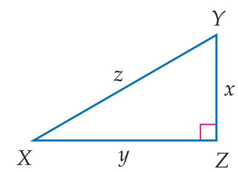
أوجد كلًّا ممّا يأتي لكلِّ متوازي أضلاع أعلاه:

(a المساحة.

(b المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.

(c المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

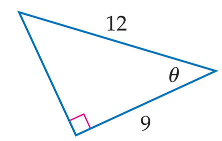
حُلّ $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين: 2 ,1 وفق القياسات المُعطاة، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



1) $Y = 65°, x = 16$

2) $X = 25°, x = 8$

3) أوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ



4) ارسم زاوية قياسها $-80°$ في الوضع القياسي.

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

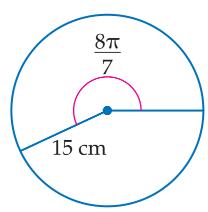
5) $215°$

6) $-350°$

7) $\frac{8\pi}{5}$

8) $\frac{9\pi}{2}$

9) **اختيار من متعدد:** طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة يساوي:



A 4.2 cm

B 17.1 cm

C 53.9 cm

D 2638.9 cm

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من الدالّتين المثلّثيتين فيما يأتي:

10) $\tan \pi$

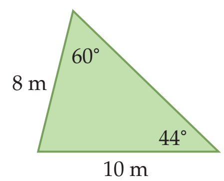
11) $\cos \frac{3\pi}{4}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقطتين الآتيتين في كلِّ مرَّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ:

12) $(0, -5)$

13) $(6, 8)$

14) **حديقة:** عند فيصل حديقة مثلَّثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحديقة؟



حدّد إن كان للمثلّث ABC في كلٍّ ممَّا يأتي حل واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

15) $A = 38°, a = 18, c = 25$

16) $A = 65°, a = 5, b = 7$

17) $A = 115°, a = 12, b = 8$

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

18) $240°$

19) $\frac{9\pi}{4}$

20) $-\frac{\pi}{4}$

21) **اختيار من متعدد:** افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أيِّ ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ؟

A الربع الأول أو الثاني

B الربع الأول أو الثالث

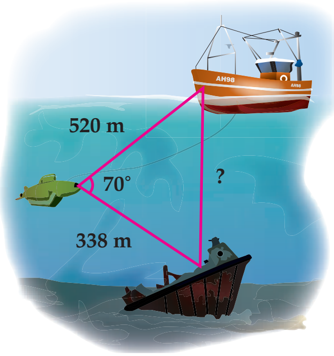
C الربع الثاني أو الثالث

D الربع الأول أو الرابع

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5 قانون جيوب التمام
Law of Cosines



فيما سبق:
درست حلّ مثلّثات باستعمال قانون الجيوب. الدرس (4-4)

والآن:
- أستعمل قانون جيوب التمام لحلِّ مثلّثات.
- أختار طرقًا مناسبة لحلِّ مثلّثات.

المفردات:
قانون جيوب التمام
Law of Cosines

لماذا؟
الغوّاصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بُعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءًا إلى حطام سفينة أخرى على بُعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلّثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

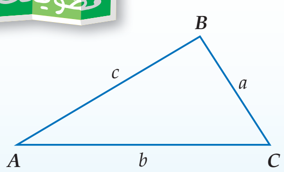
استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلّثات: لا يمكنك استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلّث مثل المثلّث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيوب التمام** لحل المثلّث في الحالتين الآتيتين:
- معرّفة طولي ضلعين في المثلّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع – زاوية – ضلع (حالة SAS))
- معرّفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلّث (ضلع – ضلع – ضلع (حالة SSS))

مفهوم أساسي — قانون جيوب التمام

أضف إلى مطويتك

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

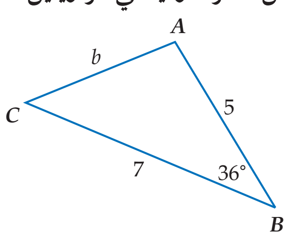
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



ستبرهن هذه الصيغة في السؤال (31)

مثال 1 حَلُّ مثلّث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حُلَّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ قانون جيوب التمام

$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$ $a = 7, c = 5, B = 36°$

$b^2 \approx 17.4$ استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

$b \approx 4.2$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة 2: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية A.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ قانون جيوب التمام

$7^2 = (4.2)^2 + 5^2 - 2(4.2)(5) \cos A$ $a = 7, b = 4.2, c = 5$

$7^2 - (4.2)^2 - 5^2 = -2(4.2)(5) \cos A$ اطرح $(4.2)^2$ و 5^2 من كلا الطرفين

$\dfrac{7^2 - (4.2)^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$ اقسم كلًّا من الطرفين على $-2(4.2)(5)$

$-0.1514 \approx \cos A$ استعمل الآلة الحاسبة

$99° \approx A$ أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.1514$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180° - (36° + 99°) \approx 45°$$

إذن: $b \approx 4.2, A \approx 99°, C \approx 45°$

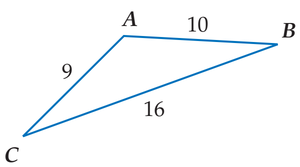
تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle FGH$ الموضَّح في الشكل المجاور الذي فيه: $G = 82°, f = 6, h = 4$ مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المثلَّث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحلِّ هي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلّث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادَّتان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.

مثال 2 حل مثلّث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة

حُلّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون جيوب التمام
$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$	$a = 16, b = 9, c = 10$
$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$	اطرح 9^2 و 10^2 من كلا الطرفين
$\dfrac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$	اقسم كلًّا من الطرفين على $-2(9)(10)$
$-0.4167 \approx \cos A$	استعمل الآلة الحاسبة
$115° \approx A$	أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.4167$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس $\angle B$.

$\dfrac{\sin B}{9} \approx \dfrac{\sin 115°}{16}$	$\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin A}{a}$
$\sin B \approx \dfrac{9 \sin 115°}{16}$	اضرب كل من الطرفين في 9
$\sin B \approx 0.5098$	استعمل الآلة الحاسبة
$B \approx 31°$	أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.5098$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180° - (115° + 31°) \approx 34°$$

إذن: $A \approx 115°, B \approx 31°, C \approx 34°$.

تحقق من فهمك

2) حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرِّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب

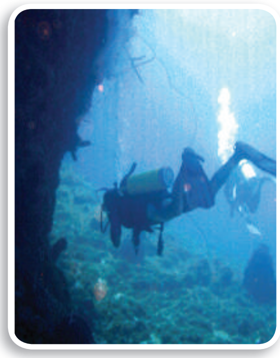
يمكن أن يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلّث مجموع قياسات زواياه 181°.

اختيار الطريقة المناسبة لحلِّ المثلَّثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحل مثلَّثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقلِّ إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسَي أيٍّ عنصرين آخرين من عناصر المثلَّث. وإذا كان للمثلَّث حلّ، فيجب أن تُقرّر ما إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحلِّه.

ملخّص المفهوم: حَلُّ المثلَّثات غير القائمة الزاوية

أضف إلى مطويتك

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيِّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

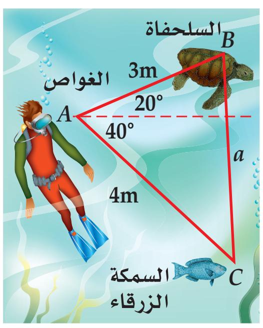


الربط بالحياة

الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غوَّاص هو 318.2 m.

مثال 3 من واقع الحياة: استعمال قانون جيوب التمام

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها $20°$ ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها $40°$ فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



افهم: تعرف قياسَي الزاويتين المتكوِّنتين من نظر الغوّاص إلى أعلى وإلى أسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغوّاص وكلٍّ من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثِّل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلَّث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلِّ المسألة.

حُلّ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون جيوب التمام
$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 60°$	$b = 4, c = 3, A = 60°$
$a^2 = 13$	استعمل الآلة الحاسبة
$a \approx 3.6$	أوجد قيمة a الموجبة

إذن المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6 m تقريبًا.

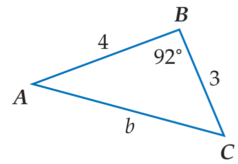
تحقّق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أنَّ: $B \approx 74°, C \approx 46°$.
بما أن $C < A < B, c < a < b$، فإن الحلَّ منطقي.

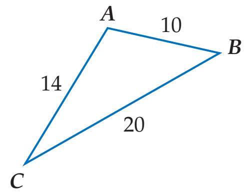
تحقق من فهمك

3) **ماراثون:** ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها $79°$، وركض مسافة 7 km . ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟

تأكـد

المثالان 1, 2 حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

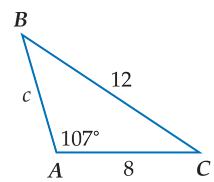
(1


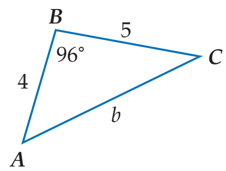
(2


(3 $a = 5, b = 8, c = 12$

(4 $B = 110°, a = 6, c = 3$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلَّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(5


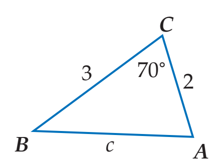
(6


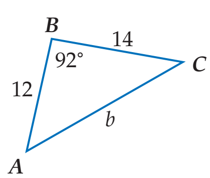
(7 $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35°, s = 16, t = 9$.

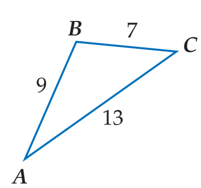
(8 **كرة قدم:** في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خطّ الوسط بزاوية قياسها 40° ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟

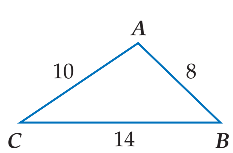
تدرب وحل المسائل

المثالان 1، 2 حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(9


(10


(11


(12


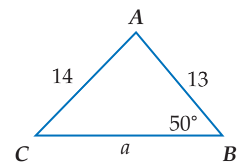
(13 $A = 116°, b = 5, c = 3$

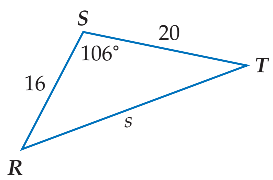
(14 $C = 80°, a = 9, b = 2$

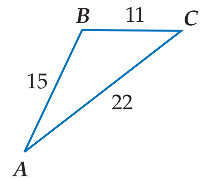
(15 $f = 10, g = 11, h = 4$

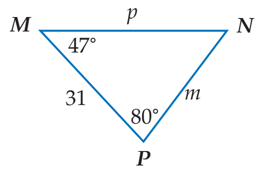
(16 $w = 20, x = 13, y = 12$

مثال 3 حدّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم جيوب التمام) لحَلِّ كلِّ مثلَّث ممَّا يأتي، ثم حُلِّ المثلَّث مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(17


(18


(19


(20


(21 $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84°, c = 7, a = 2$.

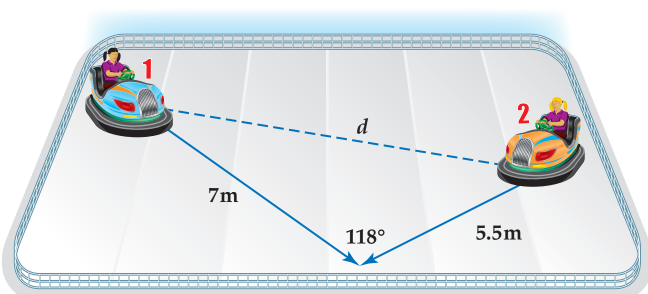
(22 $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$.

(23 **استكشاف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

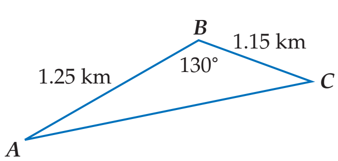
(24 **سباق:** ميدان للسباق على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه $1.8\,km, 2\,km, 1.2\,km$. أوجد قياس كلِّ زاوية من زواياه.

(25 **أرض:** قطعة أرض على شكل مثلَّث أطوال أضلاعه $140\,m, 210\,m, 300\,m$. استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقرّبةً إلى أقرب متر مربع.

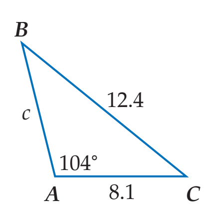
(26 **ألعاب سيارات:** في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبيَّن في الشكل أدناه، ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟

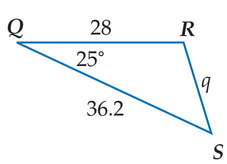


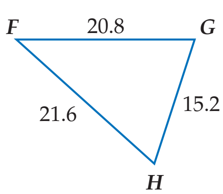
(27 **رياضة مائية:** يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهابًا وإيابًا، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

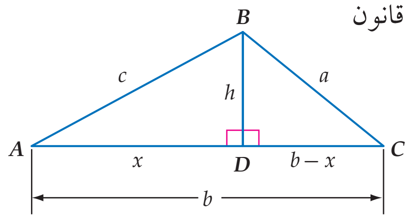
(28


(29


(30


مسائل مهارات التفكير العليا

31) **برهان:** استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون جيوب التمام، مستعملًا الإرشادات الآتية:



أولًا: طبِّق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.

ثانيًا: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.

- $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

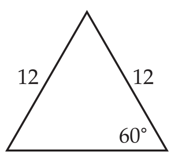
32) **تبرير:** مثلَّث أطوال أضلاعه 10.6 cm, 8 cm, 14.5 cm . وضِّح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدها مقرَّبة إلى أقرب درجة.

33) **اكتب:** قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيوب لحلِّ مثلَّث بتلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيوب التمام.

تدريب على اختبار

34) **إجابة قصيرة:** حُلَّ المعادلة: $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$

35) **هندسة:** محيط الشكل المجاور يساوي:



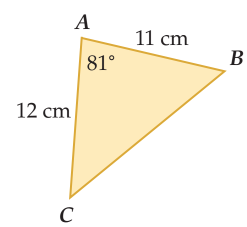
A 24 　 **C** 36

B 30 　 **D** 48

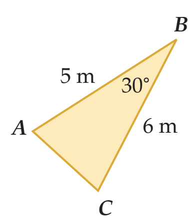
مراجعة تراكمية

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرَّبةً إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس 4-4)

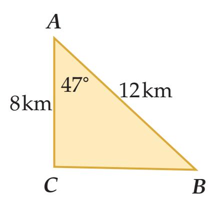
36)



37)



38)



39) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(6, -9)$، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ. (الدرس 4-3)

ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسيّ، ثم أوجد الزاوية المرجعيّة لكلٍّ منها. (الدرس 4-3)

40) $-15°$ 　 41) $\frac{5}{4}\pi$ 　 42) $245°$

rابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6 الدوالّ الدائرية
Circular Functions

فيما سبق:

درست إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية باستعمال زوايا مرجعية. الدرس (4-3)

والآن:

- أجد قيم دوالّ مثلَّثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- أستعمل خواصّ الدوالّ الدورية في إيجاد قيم دوالّ مثلَّثية.

المفردات:

دائرة الوحدة
unit circle

الدالّة الدائرية
circular function

الدالّة الدورية
periodic function

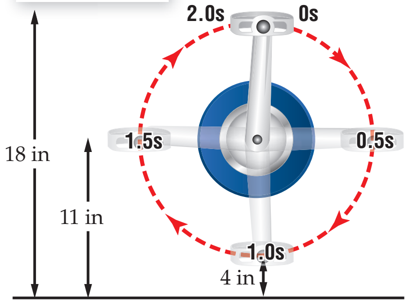
الدورة
cycle

طول الدورة
period

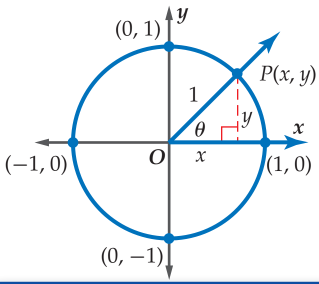
لماذا؟

عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدّال في أثناء دورانه يمثِّل دالّة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.

لاحظ أن البدّال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كلَّ ثانيتين.



الدوالّ الدائرية: **دائرة الوحدة** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالّتَي: الجيب وجيب التمام.



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

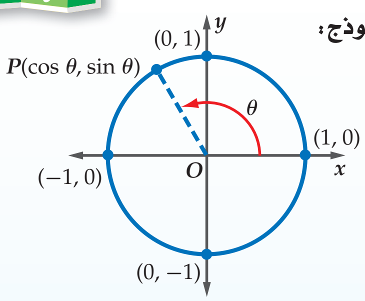
وبذلك فإن قيمة $\cos\theta$ هي الإحداثي x، وقيمة $\sin\theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي — دوالّ في دائرة الوحدة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$، فإن: $\cos\theta = x , \sin\theta = y$

النموذج:



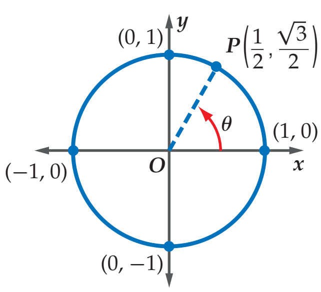
الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن: $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

كلٌّ من $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ دالّة بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كلٌّ منهما **دالّة دائرية**؛ لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1 إيجاد قيمة الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta , \sin\theta$.



$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$.

إرشادات للدراسة

الدوالّ الدائرية

بما أن طول القوس المقابل للزاوية التي قياسها θ يساوي $r\theta$، فإنه يمكن التعبير عن مجال الدالّة المثلَّثية بطول القوس المقابل للزاوية بدلًا من قياسها، وعندئذ تسمى دالّة دائرية.

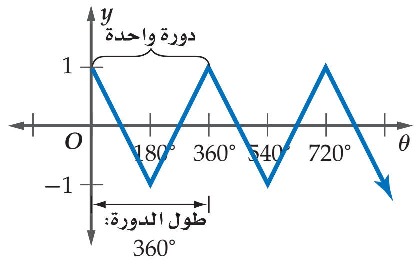
إرشادات للدراسة

الدورات

يمكن أن تبدأ الدورة عند أيّ نقطة في منحنى الدالّة الدورية. ففي المثال 2 إذا كانت بداية الدورة عند $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$، ويكون طول الدورة هو:

$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

الدوالّ الدورية : في **الدوالّ الدورية** يكون شكل الدالّة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمّى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبيّن في التمثيل البياني للدالّة أدناه.

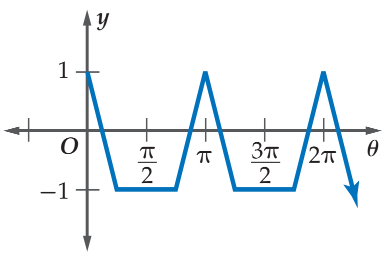


θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تتكرر الدورة كل °360

مثال 2 إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.

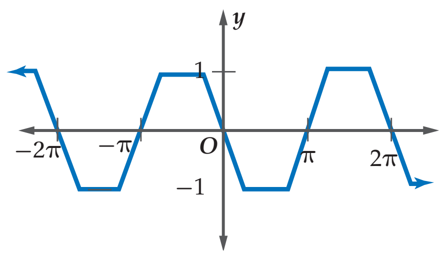


يبدأ تكرار النمط عند $\pi, 2\pi, \ldots$ ،

ولذلك طول الدورة هو π.

تحقق من فهمك

2) أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



دوران العجلة والبدّال في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوّارة، والعديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تُمثّل دوالّ دورية.

الربط بالحياة

أغلب متسابقي الدرّاجات الهوائية يديرون البدّالات بمعدّلات تزيد على 200 دورة/دقيقة. أما غالبية الناس الذي يركبون دراجات هوائية فيديرونها بمعدّلات تتراوح بين 90-120 دورة/دقيقة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال الدوالّ الدوريّة

درّاجات هوائية : عُدْ إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البدّال في الدرّاجة الهوائية بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:

a) أنشئ جدولًا يوضّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية:
0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 , 2.5, 3

عند 0s يكون الارتفاع 18 in. وعند 0.5s، يكون الارتفاع 11 in، وعند 1s يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

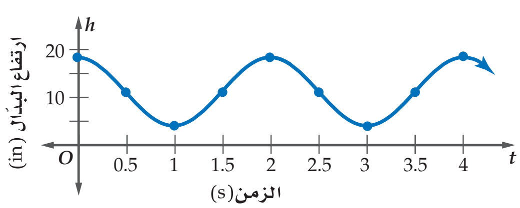
الزمن (s)	الارتفاع (in)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

b) أوجد طول دورة الدالّة.

طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.

c) مثّل الدالّة بيانيًّا. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h.

أقصى ارتفاع يصله البدّال 18 in. وأقلّ ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتان، لذا فإن النمط يتكرَّر كلَّ ثانيتين.



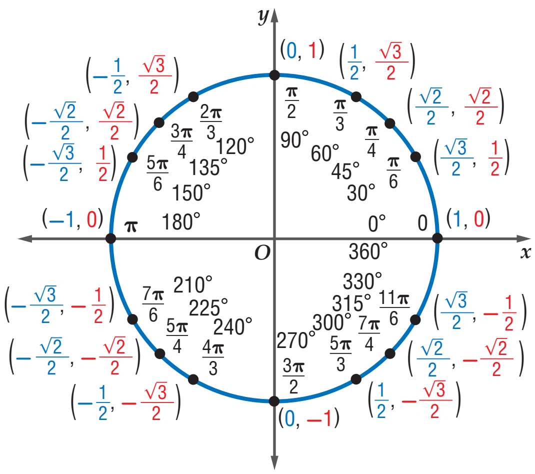
تحقق من فهمك

3) **درّاجات هوائية** افترض أن البدّال للدرّاجة الهوائية المحدَّدة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدَّل دورة واحدة لكل ثانية.

A) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

B) أوجد طول دورة الدالّة ومثّلها بيانيًّا.

يبيِّن الشكل المجاور القيم الدقيقة لكلٍّ من $\cos\theta, \sin\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثّل الإحداثي x قيمة $\cos\theta$، ويمثِّل الإحداثي y قيمة $\sin\theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.



يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالّتين: $\cos\theta, \sin\theta$ بيانيًّا، حيث يمثِّل المحور الأفقي قيم θ. والمحور الرأسي قيم الدالّة المطلوبة.

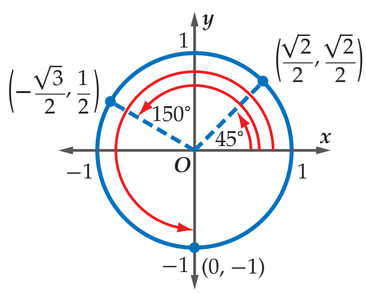
تتكرَّر دورة كلٍّ من دالّتَي الجيب وجيب التمام كل °360. وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كلٍّ منهما °360 أو 2π.

إرشادات للدراسة

الراديان

عند تمثيل دالّتي الجيب وجيب التمام يمكن تدريج المحور θ بالراديان.

إذا كانت النقاط المبيّنة في الشكل تمثِّل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45°, \theta = 150°, \theta = 270°$.

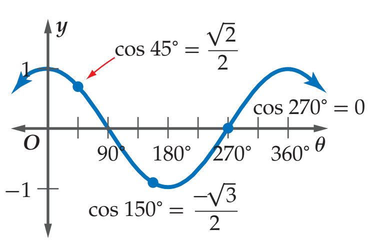


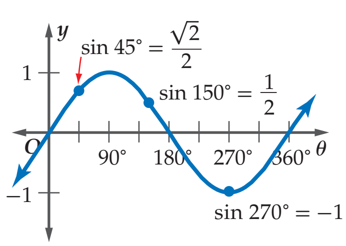
$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $\sin\theta, \cos\theta$ كما يأتي:





بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين هو °360، فإن قيم كلٍّ من الدالّتين تتكرّر كلَّ °360.
لذلك فإن $\sin (x + 360°) = \sin x$, $\cos (x + 360°) = \cos x$

مثال 4 حساب قيم الدوالّ المثلّثية

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

a) $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos (120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b) $\sin \frac{11\pi}{4}$

$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin \frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك

4A) $\sin 420°$

4B) $\cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

تأكـد

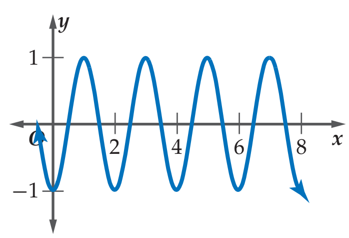
مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos \theta, \sin \theta$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

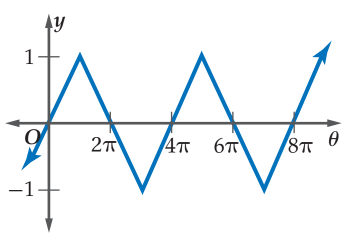
2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

3)



4)



مثال 3 **5)** **أرجوحة:** إذا مثّل ارتفاع أرجوحة دالّة دوريّة في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو $2\,\text{m}$ ، ثم تعود إيابًا لتصل $2\,\text{m}$ مرّة أخرى مرورًا بأقلِّ ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}\text{m}$ ، مستغرقة زمنًا قدره ثانية واحدة بين أقلِّ ارتفاع وأقصى ارتفاع، فأجب عما يأتي:

a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهابًا وإيابًا بدءًا بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟

b) مثّل بيانيًّا ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالّة في الزمن t.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممّا يأتي:

6) $\sin \frac{13\pi}{6}$

7) $\sin (-60°)$

8) $\cos 540°$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

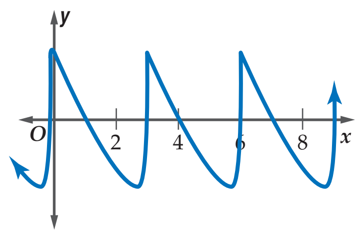
10) $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

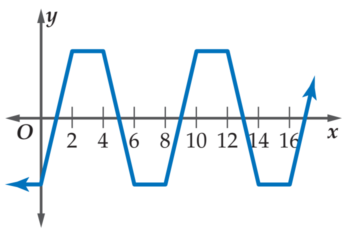
12) $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية:

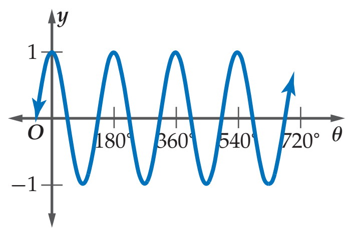
13)



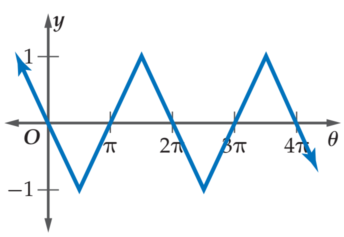
14)



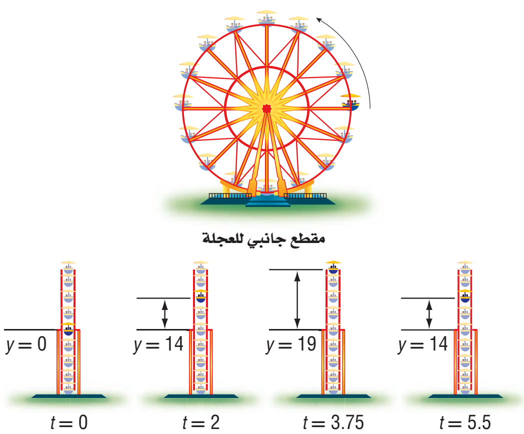
15)



16)



مثال 3 17) **العجلة الدّوارة:** يبيِّن الشكل المجاور موقع مقعد راكب y بالأقدام عن مركز العجلة بعد t ثانية. إذا تغيَّر ارتفاع المقعد y في العجلة بصورة دورية كدالّة في الزمن، فأجب عما يأتي:



a) أنشئ جدولًا يوضِّح ارتفاع المقعد y عند الثواني الآتية: $0, 2, 3.75, 5.5, 7.5, 9.5, 11.25, 13, 15.5$

b) أوجد طول دورة الدالّة.

c) مثّل الدالّة بيانيًّا. افترض أنَّ المحور الأفقي يمثِّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثِّل الارتفاع y.

مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكلِّ دالّة مثلَّثية ممَّا يأتي:

18) $\sin\frac{7\pi}{3}$

19) $\cos(-60^\circ)$

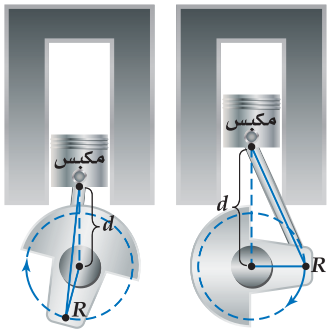
20) $\cos 450^\circ$

21) $\sin\frac{11\pi}{4}$

22) $\sin(-45^\circ)$

23) $\cos 570^\circ$

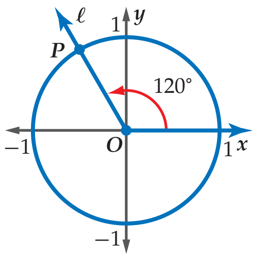
24) محرِّكات: في المحرِّك المجاور، تمثِّل (d) المسافةَ من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمّى ناقل الحركة (الكرنك)، وتشكِّل دالّةً في الزمن. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) أوجد طول الدورة بالثواني.

b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm، وأكبر قيمة 7 cm، فمثّل منحنى الدالّة بيانيًّا، معتبرًا أن المحور الأفقي يمثّل الزمن t، والمحور الرأسي يمثّل المسافة d.

25) تمثيلات متعدِّدة: يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يبيِّن الشكل المجاور.



a) **هندسيًّا:** انسخ الشكل في دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها 30°, 60°, 150°, 210° , 315° في الوضع القياسي.

b) **جدوليًّا:** أنشئ جدولًا للقيم يوضِّح ميل كلِّ ضلع انتهاء، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظلِّ الزاوية والميل؟ وضِّح إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي:

26) $\cos 45° - \cos 30°$

27) $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

28) $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

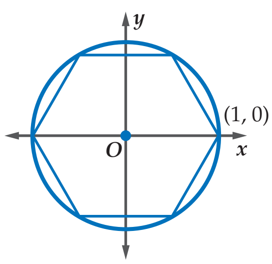
29) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

30) $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

31) $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا

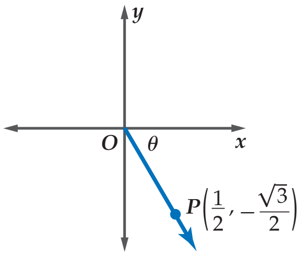
32) هندسة: رُسِم سداسي منتظم داخل دائرة وحدة مركزها نقطة الأصل، بحيث تقع رؤوسه جميعها على الدائرة كما في الشكل المجاور. إذا كانت إحداثيات أحد رؤوس السداسي (1 , 0)، فما إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى من السداسي؟



33) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من خالد ونواف بحساب قيمة المقدار $\cos \frac{-\pi}{3}$. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

خالد	نواف
$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$ $= -0.5$	$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ $= \cos \frac{5\pi}{3} = 0.5$

34) تحدٍّ: إذا بدأ نصف المستقيم الموضَّح في الشكل المجاور من نقطة الأصل مارًّا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x .



35) تبرير: حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.
" طول دورة دالّة الجيب من مضاعفات π "

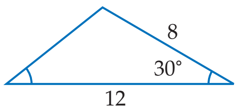
36) اكتب: وضِّح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالّة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالّة. ضمّن في توضيحك وصفًا للدورة.

تدريب على اختبار

37) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

A 5 **B** 13 **C** 31 **D** 161

38) هندسة: مساحة المثلَّث الموضَّح في الشكل المجاور تساوي:

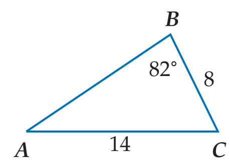


A 48 **B** 96 **C** 41.6 **D** 24

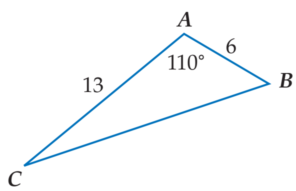
مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المثلَّثات الآتية، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرسان 5-4، 4-4)

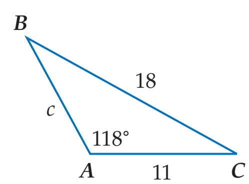
39)



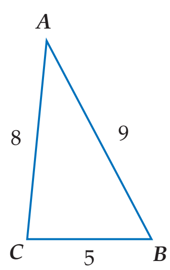
40)



41)



42)



حدِّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممَّا يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: (الدرس 4-4)

43) $A = 72°, a = 6, b = 11$

44) $A = 46°, a = 10, b = 8$

45) $A = 110°, a = 9, b = 5$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

46) $\dfrac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

47) $\dfrac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

48) $\dfrac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

4-7 تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

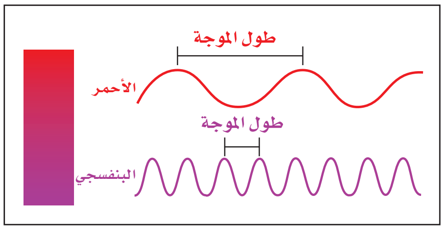
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست الدوالّ الدورية. الدرس (6-4)

والآن:
- أصف دوالّ الجيب وجيب التمام والظل، وأمثّلها بيانيًّا.
- أصف دوالّ مثلَّثية أخرى، وأمثّلها بيانيًّا.

المفردات:
السعة amplitude
التردد frequency

لماذا؟

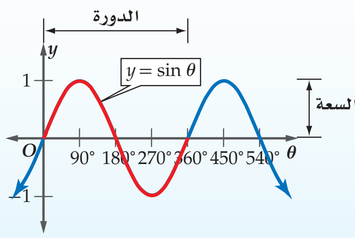
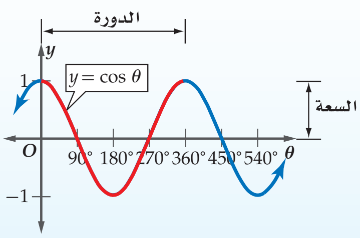


لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة: $y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$، حيث تمثِّل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

دوالُّ الجيب وجيب التمام والظل: يمكنك تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. تذكّر أن منحنيات الدوالّ الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكلِّ دورة يُسمّى طول الدورة. **سعة** منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مفهوم أساسي — **دالتا الجيب وجيب التمام** — أضف إلى مطويتك

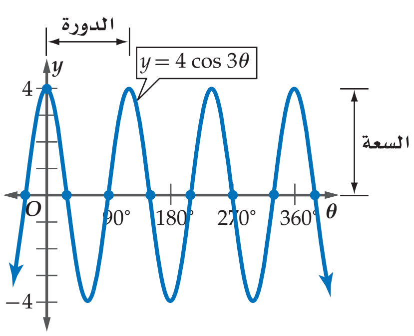
الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

قراءة الرياضيات
رمز طول الموجة يُستعمل الرمز λ للدلالة على طول الموجة، ويُقرأ لمبدا.

يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوالّ الأخرى على التمثيل البياني للدوالّ المثلَّثية في صورتها العامة: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 3\theta$.



السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة يساوي 4 $= \frac{4 - (-4)}{2}$ أو $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$

من الرسم يكرّر الرسم نفسه كلَّ 120°

إرشادات للدراسة
طول الدورة في الدالّتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$، b تُمثّل عدد الدورات في 360°. ففي المثال 1 يدلُّ العدد 3 في الدالّة: $y = 4 \cos 3\theta$ على وجود 3 دورات في 360°. مما يعني وجود دورة واحدة في 120°.

تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

1A) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$ **1B)** $y = 3 \sin 5\theta$

استعمل منحنيات الدوالّ المولّدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالّتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام المناسبة بيانيًّا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ.

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \cos b\theta$	$y = a \sin b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

إرشادات للدراسة

نقاط التقاطع مع المحور θ

يمكن إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالّة مع المحور θ بوضع $y = \theta$ وحلّ المعادلة أو إيجاد قيم θ التي تحقّقها.

مثال 2 تمثيل دالّتي الجيب وجيب التمام بيانيًّا

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2$, $b = 1$.

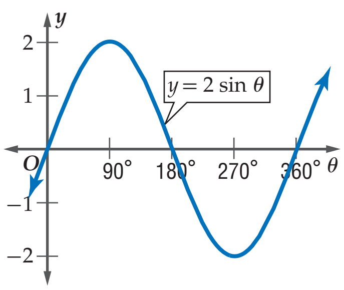
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًّا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2 .

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة طولها $360°$.

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$



b) $y = \cos 4\theta$

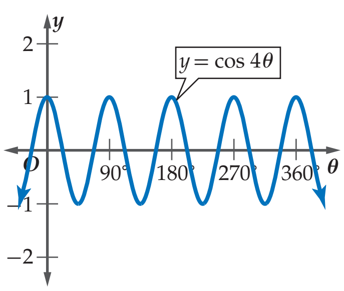
أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ، حيث: $a = 1$, $b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$



إرشادات للدراسة

السعة

في التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$ ، تكون السعة هي $|a|$ ، والقيمة العظمى هي $y = |a|$، والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

2A) $y = 3 \cos \theta$ **2B)** $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوالّ المثلّثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتمّ وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالّة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلًا إذا كان طول الدورة للدالّة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

الربط بالحياة

يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل موقف بدالّة دورية

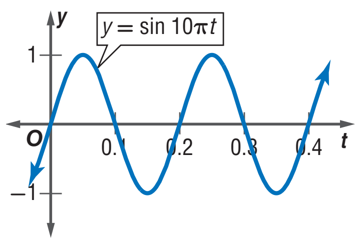
أصوات: تُسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقلّ من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات/ ثانية.

a) أوجد طول دورة الدالّة التي تعبر عن موجات الصوت.

يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد، ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $\frac{1}{5} = 0.2$.

b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب تُمثّل موجة الصوت y باعتبارها دالّة في الزمن t، ثم مثّلها بيانيًّا.

طول الدورة $= \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	اكتب العلاقة بين طول الدورة و b
$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert} = 0.2$	عوّض
$0.2\lvert b\rvert = 2\pi$	اضرب الطرفين في $\lvert b\rvert$
$b = 10\pi$	اضرب الطرفين في 5؛ b موجبة
$y = a \sin b\theta$	الصورة العامة لدالّة الجيب
$y = 1 \sin 10\pi t$	$a = 1,\ b = 10\pi,\ \theta = t$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط



تحقق من فهمك

3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

A) أوجد طول دورة الدالّة.

B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب التمام التي تعبِّر عن موجات الصوت، ثم مثّلها بيانيًّا.

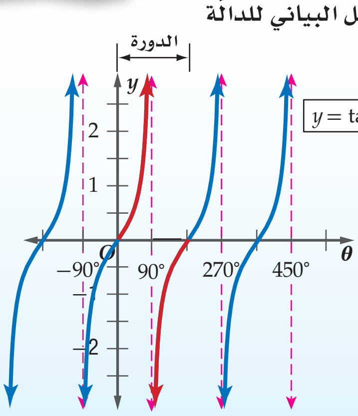
إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة
لاحظ أن السعة تؤثّر في منحنى الدالّة في اتجاه المحور y، أما طول الدورة فيؤثّر في اتجاه المحور x.

تُعَدّ دالّة الظلّ من الدوالّ المثلَّثية التي لها خطوط تقارب.

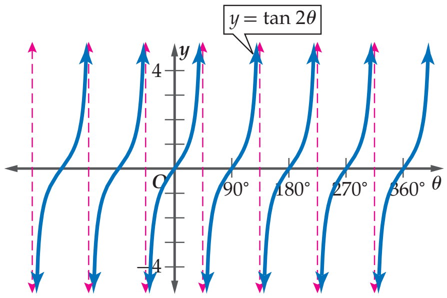
مفهوم أساسي — دالّة الظلّ

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \tan\theta$	التمثيل البياني للدالّة
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180°n,\ n \in Z\}$	
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
السعة	غير معرّفة	
طول الدورة	180°	

طول الدورة لمنحنى الدالّة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180°}{\lvert b\rvert}$، ولا يوجد سعة لهذه الدالّة. وخطوط التقارب الرأسية لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{180°}{\lvert b\rvert}\right)$

مثال 4 تمثيل دوالّ الظلّ بيانيًا



أوجد طول دورة الدالّة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

طول الدورة: $\frac{180°}{|b|} = \frac{180°}{|2|} = 90°$

خط تقارب عند: $\frac{180°}{|2b|} = \frac{180°}{2|2|} = 45°$

ارسم خطوط التقارب عند

$-3 \cdot 45° = -135°,\ -1 \cdot 45° = -45°,\ 1 \cdot 45° = 45°,\ 3 \cdot 45° = 135°, \ldots$

استعمل $y = \tan \theta$، ولكن ارسم دورة كاملة كل $90°$.

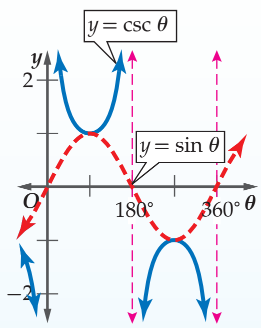
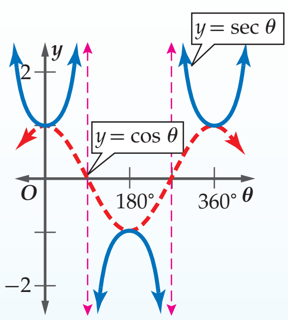
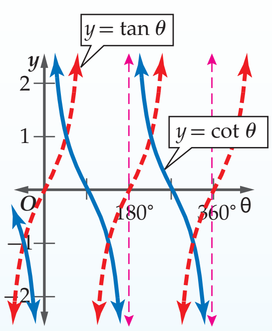
تحقق من فهمك

4) أوجد طول دورة الدالّة $y = \frac{1}{2}\tan \theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

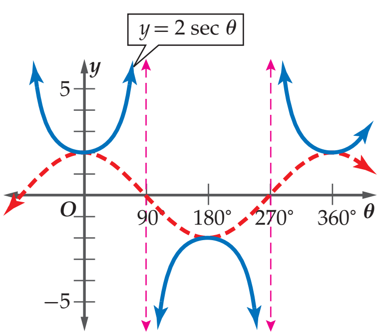
تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًّا : ترتبط منحنيات دوالّ قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام بمنحنيات دوالّ الجيب، وجيب التمام، والظلّ.

مفهوم أساسي دوالّ قاطع التمام والقاطع وظلّ التمام

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
طول الدورة	360°	360°	180°

مثال 5 تمثيل الدوالّ المثلّثية الأخرى بيانيًا



أوجد طول دورة الدالّة $y = 2\sec \theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

طول دورة الدالّة يساوي 360°، وبما أن $y = \sec \theta$ هي مقلوب $y = \cos \theta$ فإنه لتمثيل $y = 2\sec \theta$ ، استفد من تمثيل $y = 2\cos \theta$ واتبع ما يلي:

– ارسم الدالّة $y = 2\cos \theta$.

– ارسم خطوط التقارب الرأسية عند نقاط تقاطع الدالّة $y = 2\cos \theta$ مع محور θ.

– مثّل الدالّة $y = 2\sec \theta$.

إرشادات للدراسة

دالّة الظلّ

لا يوجد سعة لدالّة الظلّ بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.

قراءة الرياضيات

الرمز ∨

يُقرأ الرمز ∨ "أو" ويعني هنا اتحاد فترتين.

إرشادات للدراسة

دوالّ المقلوب

يمكنك استعمال منحنيات الدوالّ: $y = \sin \theta,\ y = \cos \theta,$ $y = \tan \theta$ لتمثيل منحنيات دوالّ المقلوب $\csc \theta, \sec \theta, \cot \theta$.

تحقق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالّة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالّة بيانيًّا.

تأكـد

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

المثالان 1, 2

1) $y = 4 \sin \theta$
2) $y = \sin 3\theta$
3) $y = \cos 2\theta$
4) $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3

5) **عناكب:** عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

a) أوجد طول دورة الدالّة.

b) افرض أن سعة الدالّة وحدة واحدة. واكتب دالّة جيب تُمثّل اهتزازات الشبكة y كدالّة في الزمن t، ومثلها بيانيًّا.

المثالان 4, 5

أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

6) $y = 3 \tan \theta$
7) $y = 2 \csc \theta$
8) $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

9) $y = 2 \cos \theta$
10) $y = 3 \sin \theta$
11) $y = \sin 2\theta$
12) $y = \cos 3\theta$
13) $y = \frac{3}{4} \cos \theta$
14) $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$
15) $y = 3 \cos 2\theta$
16) $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$
17) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

مثال 3

18) **أمواج:** قارب في عرض البحر يرتفع إلى أعلى وينخفض إلى أسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقلّ ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًّا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالّة جيب تُمثّل حركة القارب ومثّلها بيانيًّا. افترض أن h: الارتفاع بالبوصات، وt: الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقرٍّ عندما $t = 0$.

19) **كهرباء:** يتمثّل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: 165, -165 فولت، ويتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالّة دورية. اكتب دالّة جيب تمام تُمثّل فرق الجهد V كدالّة في الزمن t، ومثّلها بيانيًّا. افترض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

المثالان 4, 5

أوجد طول الدورة لكلٍّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

20) $y = \tan\frac{1}{2}\theta$

21) $y = 3\sec\theta$

22) $y = 2\cot\theta$

23) $y = \csc\frac{1}{2}\theta$

24) **زلازل:** محطة لرصد الزلازل رصدت موجة لزلزال ذات تردد 0.5 هيرتز، وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

a) اكتب دالّة جيب تمثّل ارتفاع الموجة h كدالّة في الزمن t . افترض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجة.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

25) **اهتزازات:** سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالّة جيب التمام التي تمثّل اهتزازات السلك y كدالّة في الزمن t، ومثّلها بيانيًّا. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. وإذا تضاعف التردد، فماذا يحصل لكلٍّ من طول الدورة والسعة؟

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية، ثم مثّلها بيانيًّا:

26) $y = 3\sin\frac{2}{3}\theta$

27) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{3}{4}\theta$

28) $y = 2\tan\frac{1}{2}\theta$

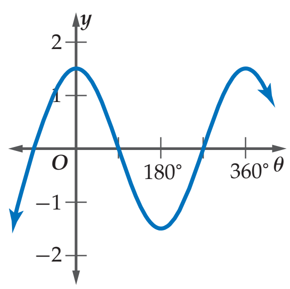
29) $y = 2\sec\frac{4}{5}\theta$

30) $y = 5\csc 3\theta$

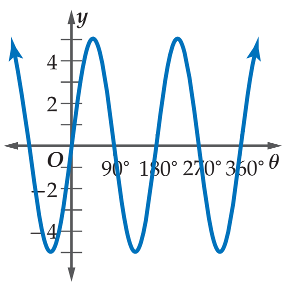
31) $y = 2\cot 6\theta$

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

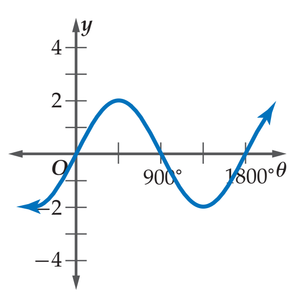
32)



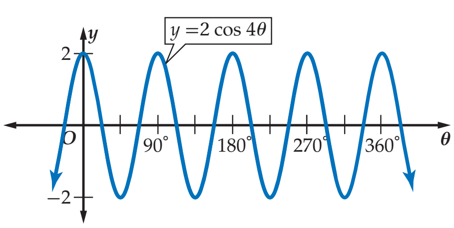
33)



34)



35)



الربط بالحياة

الزلزال هو اهتزاز مفاجئ في القشرة الأرضية ينتج عن تكسُّر الصخور بسبب حركة الصفائح الأرضية، وينتج عن هذا الاهتزاز موجات زلزالية تنطلق من النقطة التي حدث عندها الكسر في باطن الأرض، وتنتشر في جميع الاتجاهات.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** حدِّد المجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين $y = a\cos\theta$ ، $y = a\sec\theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

37) **تبرير:** عيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالّة $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ ، ومنحنى الدالّة $y = \sin\frac{1}{2}\theta$.

38) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مثلَّثية سعتها 3 ، وطول دورتها $180°$. ثم مثّلها بيانيًّا.

39) **اكتب:** وضِّح كيف تُحسب سعة الدالّة $y = -2\sin\theta$. ووضِّح كيف يؤثّر المعامل السالب في التمثيل البيانيّ للدالّة.

تدريب على اختبار

40) **مراجعة:** أيّ من الزوايا الآتية تحقِّق $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؟

A $990°$ B $1080°$ C $1830°$ D $1215°$

41) **إجابة قصيرة:** أوجد الحدّ رقم 100001 في المتتابعة:

$13, 20, 27, 34, 41, \ldots$

42) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟

A 25% B 34% C 66% D 75%

مراجعة تراكمية

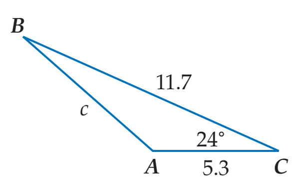
أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-4)

43) $\cos 120° - \sin 30°$

44) $3(\sin 45°)(\sin 60°)$

45) $4\sin\frac{4\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}$

46) حُلَّ المثلَّث المجاور، مقرِّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزاويتين إلى أقرب درجة. (الدرس 5-4)



47) مثِّل الدالّة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-8 الدوالّ المثلَّثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

فيما سبق:

درست تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًّا. الدرس (4-7)

والآن:

- أجد قيم الدوالّ المثلّثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوالّ المثلّثية العكسية.

المفردات:

القيم الأساسية
principal values

دالّة الجيب العكسية
Arcsine function

دالّة جيب التمام العكسية
Arccosine function

دالّة الظل العكسية
Arctangent function

المعادلة المثلّثية
Trigonometric equation

لماذا؟

لقد تعلّمت كيف تستعمل الدوالّ المثلَّثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادّة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in، ويصل ارتفاعه إلى 75 in . ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالّة الظلّ.

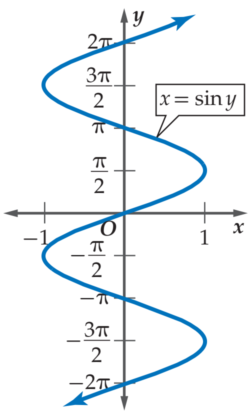
$$\tan\theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلّها 0.2 مستعملًا الآلة الحاسبة العلمية.

SHIFT tan .2 = 11.30993247

إذن قياس الزاوية θ حوالي $11°$.

معكوس الدالّة المثلّثية: إذا علمت قيمة الدالّة المثلَّثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالّة لإيجاد قياس الزاوية. تذكّر أن معكوس الدالّة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x, y. فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



لاحظ أن معكوس الدالّة ليس دالّة لوجود عدد من قيم y لكلٍّ قيمة من قيم x.

لكن إذا تمَّ تحديد مجال الدالّة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$،

فإن المعكوس يكون دالّة عكسية.

تُسمّى القيم في هذا المجال المحدّد **القيم الأساسية**. فالدوالّ المثلّثية ذات المجال المحدّد تُمثّل بأحرف كبيرة، هكذا:

- $y = \text{Sin}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

يمكنك استعمال الدوالّ ذات المجالات المحددة لتعريف دوالّ عكسية: لكلٍّ من دالّة الجيب، ودالّة جيب التمام ودالّة الظلّ وهي **دالّة الجيب العكسية**، و**دالّة جيب التمام العكسية**، و**دالّة الظلّ العكسية** كما يأتي:

إرشادات للدراسة

رموز الدوالّ العكسية

يُرمز للدوالّ العكسية أحيانًا ببعض الرموز الأخرى مثل:

دالّة الجيب العكسية
$y = \text{Arcsin}\ x$

دالّة جيب التمام العكسية
$y = \text{Arccos}\ x$

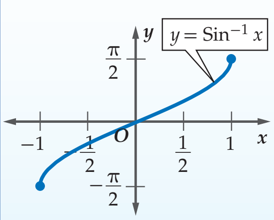
دالّة الظل العكسية
$y = \text{Arctan}\ x$

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلَّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالّة الجيب العكسية	$y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$
دالّة الظل العكسية	$y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$

نموذج



في العلاقة $y = \cos^{-1} x$، إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن $y = 60°, 300°$، كما أن كلَّ زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين بضلع الانتهاء تُعدّ قيمة لـ y أيضًا. أما في الدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$، فإذا كانت $x = \frac{1}{2}$، فإن $y = 60°$ فقط.

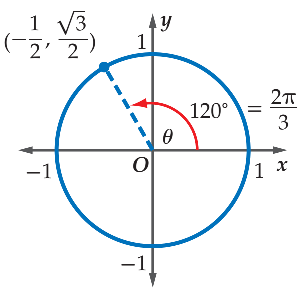
مثال 1 إيجاد قيم الدوالّ المثلَّثية العكسية

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

a) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

المطلوب إيجاد الزاوية θ، حيث $0° \leq \theta \leq 180°$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1: استعمال دائرة الوحدة



أوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيّها x هو $-\frac{1}{2}$.

نلاحظ أن: $\cos \theta = -\frac{1}{2}$، عندما $\theta = 120°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

الطريقة 2: استعمال الزاوية المرجعية

بما أن المطلوب $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$، حيث $0° \leq \theta \leq 180°$

فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني.

أوجد الزاوية الحادّة (المرجعية) θ'

بما أن $\cos \theta' = \frac{1}{2}$، فإن $\theta' = 60° = \frac{\pi}{3}$

إذن $\theta = 180° - \theta'$ — θ زاوية تقع في الربع الثاني

$= 180° - 60°$

$= 120°$

الطريقة 3: استعمال الآلة الحاسبة

المفاتيح: $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\cos}\ (-1 \div 2)\ \boxed{=}$ 120

إذن $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

b) $\text{Tan}^{-1}(1)$

المطلوب إيجاد الزاوية θ في الفترة $-90° < \theta < 90°$ والتي ظلُّها يساوي 1.

المفاتيح: $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ 1\ \boxed{=}$ 45

إذن $\text{Tan}^{-1}(1) = 45° = \frac{\pi}{4}$.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

1A) $\text{Cos}^{-1} 0$

1B) $\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مراجعة المفردات

الدوالّ العكسية

f, f^{-1} كلٌّ منهما دالّة عكسية للأخرى تعني: $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية

تذكّر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالّة المثلَّثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

عند حساب قيمة معينة بوجود عدد من الدوالّ المثلَّثية، استعمل ترتيب العمليات الحسابية للحلِّ.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلَّثية

أوجد قيمة $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: tan SHIFT cos $(1 \div 2)$ = 1.732050808

إذن $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

تحقق: $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°, \tan 60° \approx 1.73$

إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

(2A $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

(2B $\cos\left(\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

حَلُّ المعادلات المثلّثية باستعمال الدوالّ العكسية: **المعادلة المثلَّثية** هي معادلة تحتوي على دوالّ مثلَّثية بزوايا مجهولة القياس. وحَلُّ المعادلة المثلَّثية يعني: إيجاد قياس الزوايا المجهولة، والتي دوالّها المثلَّثية تجعل المعادلة المثلَّثية صحيحة، وذلك بإعادة كتابتها باستعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\text{Sin}\ \theta = -0.35$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35. ويمكن كتابة هذا في الصورة: $\text{Sin}^{-1}(-0.35) = \theta$.

حلُّ فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: SHIFT sin (-0.35) = -20.48731511

إذن $\theta \approx -20.5°$. الإجابة الصحيحة هي A.

تحقق من فهمك

(3 إذا كان $\text{Tan}\ \theta = 1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A $0.03°$ **C** $60.9°$

B $29.1°$ **D** لا يوجد حلّ

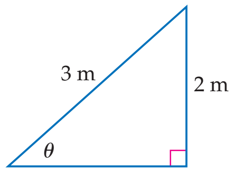
إرشادات للاختبار

حذف البدائل

إشارة $\text{Sin}\ \theta$ تُحدِّد قياس الزاوية في الربع الأول أو الربع الرابع، وبما أن -0.35 قيمة سالبة، فابحث عن زاوية في الربع الرابع.

يمكنك استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسيّة؛ لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في مثلَّث قائم الزاوية بمعرَّفة طولي ضلعين فيه.

مثال 4 من واقع الحياة **استعمال الدوالّ المثلَّثية العكسية**



لعبة التزحلق: لعبة تزحلق للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالّة الجيب.

$\text{Sin}\ \theta = \frac{2}{3}$ دالّة الجيب

$\theta = \text{Sin}^{-1}\frac{2}{3}$ دالّة معكوس الجيب

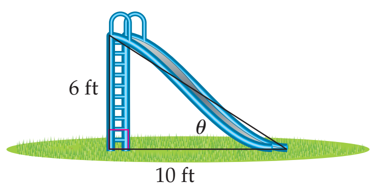
$\theta \approx 41.8°$ استعمل الآلة الحاسبة

إذن قياس الزاوية يساوي °41.8 تقريبًا.

تحقّق: باستعمال الآلة الحاسبة، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{2}{3}$.

أيّ أن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك



4) **تزلج:** يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

تأكـد

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

1) $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$

2) $\text{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$

3) $\text{Cos}^{-1}(-1)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

4) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

5) $\tan(\text{Cos}^{-1} 1)$

6) $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

مثال 3 7) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\text{Sin}\ \theta = 0.422$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

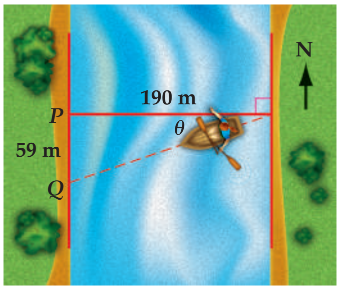
A 25°　B 42°　C 48°　D 65°

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

8) $\text{Cos } \theta = 0.9$ 9) $\text{Sin } \theta = -0.46$ 10) $\text{Tan } \theta = 2.1$

مثال 4

11) **قوارب:** يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.



تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بالدرجات وبالراديان:

12) $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 13) $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

14) $\text{Sin}^{-1}(-1)$ 15) $\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$

16) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 17) $\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

18) $\tan\left[\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ 19) $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

20) $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}\right)$ 21) $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{9}\right)$

22) $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

مثال 3 حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

23) $\text{Tan } \theta = 3.8$ 24) $\text{Sin } \theta = 0.9$

25) $\text{Sin } \theta = -2.5$ 26) $\text{Cos } \theta = -0.25$

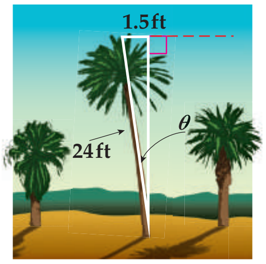
27) $\text{Cos } \theta = 0.56$ 28) $\text{Tan } \theta = -0.2$

مثال 4

الربط بالحياة

فوائد شجرة نخلة التمر لا تُعدّ ولا تُحصى، منها قيمتها الغذائية العالية، وتُعدّ مصدرًا ممتازًا للطاقة الحرارية لجسم الإنسان، إذ تحوي ما يقارب 80% من السكريات، وتحتوي الثمار على الأملاح المعدنية والعناصر النادرة المفيدة لجسم الإنسان كالبوتاسيوم والماغنسيوم والحديد وفيتامينات أ، ب، $ب_2$، $ب_6$، ويستفيد الناس من أجزاء النخيل كلها.

(29 **نخيل:** شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل المجاور، اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تميل بها الشجرة، ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.



حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

(30 $\csc \theta = 1$ (31 $\sec \theta = -1$ (32 $\sec \theta = 1$

(33 $\csc \theta = \frac{1}{2}$ (34 $\cot \theta = 1$ (35 $\sec \theta = 2$

(36 **تمثيلات متعدّدة:** أجب عما يأتي، معتبرًا $y = \text{Cos}^{-1} x$.

a) **بيانيًّا:** مثّل الدالّة بيانيًّا. وأوجد المجال والمدى.

b) **عدديًّا:** اختر قيمة للمتغيّر x بين $-1, 0$. ثم أوجد قيمة الدالّة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.

c) **تحليليًّا:** قارن بين التمثيل البياني للدالّة $y = \cos x$، والتمثيل البياني للدالّة $y = \text{Cos}^{-1} x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(37 **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من خليل وعبدالرحمن بحلّ المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

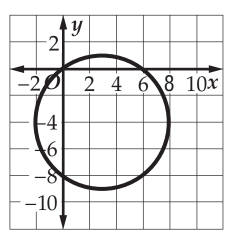
خليل	عبدالرحمن
$\cos \theta = 0.3$	$\cos \theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$	$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$

(38 **تبرير:** وضِّح كيف يرتبط مجال الدالّة $y = \text{Sin}^{-1} x$ مع مدى الدالّة $y = \text{Sin}\ x$.

(39 **اكتب:** فسّر لماذا تكون كلٌّ من $\text{Cos}^{-1} 8, \text{Sin}^{-1} 8$ غير معرَّفة، بينما $\text{Tan}^{-1} 8$ معرَّفة.

تدريب على اختبار

(40 **إجابة قصيرة:** أوجد معادلة الدائرة الممثّلة في الشكل الآتي:



(41 إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، $g(x) = 4 - 2x$ ، فأوجد $g[f(x)]$.

A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

مراجعة تراكمية

(42 أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًّا. (الدرس 4-7)

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 4-3)

(43 $\cos 3\pi$ (44 $\tan 120°$ (45 $\sin 300°$ (46 $\sec \frac{7\pi}{6}$

الفصل 4

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوالّ المثلّثية في المثلّثات القائمة الزاوية (الدرس 4-1)

- $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}, \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}, \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
- $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}, \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}, \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

الزوايا وقياسها والدوالّ المثلّثية للزوايا (الدرسان 4-2, 4-3)

- يُحدّد قياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي بمقدار الدوران واتجاهه من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد قيم الدوالّ المثلّثية الستّ للزاوية θ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيوب التمام (الدرسان 4-4, 4-5)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

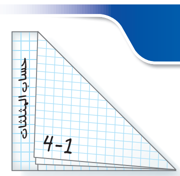
الدوالّ الدائرية والدوالّ المثلّثية العكسية (الدرسان 4-6, 4-8)

- إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x, \sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \text{Cos}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$
- $y = \text{Tan}\, x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x, \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوالّ المثلّثية بيانيًّا (الدرس 4-7)

- للدوالّ المثلّثية التي في إحدى الصورتين $y = a\sin b\theta, y = a\cos b\theta$، سعة تساوي $|a|$، وطول دورة يساوي $\frac{360^\circ}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{|b|}$.
- أما الدالّة المثلّثية $y = a\tan b\theta$ فطول دورتها يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$، ولا يوجد لها سعة.

المطويات منظم أفكار



تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

- **حساب المثلّثات** ص 159
- **النسبة المثلّثية** ص 159
- **الدالّة المثلّثية** ص 159
- **الجيب** ص 159
- **جيب التمام** ص 159
- **الظل** ص 159
- **قاطع التمام** ص 159
- **القاطع** ص 159
- **ظل التمام** ص 159
- **دوالّ المقلوب** ص 160
- **معكوس الجيب** ص 162
- **معكوس جيب التمام** ص 162
- **معكوس الظل** ص 162
- **زاوية الارتفاع** ص 163
- **زاوية الانخفاض** ص 163
- **الوضع القياسي** ص 168
- **ضلع الابتداء** ص 168
- **ضلع الانتهاء** ص 168
- **الراديان** ص 170
- **الزاوية المركزية** ص 171
- **طول القوس** ص 171
- **الزاوية الربعية** ص 175
- **الزاوية المرجعية** ص 175
- **قانون الجيوب** ص 181
- **حل المثلث** ص 181
- **قانون جيوب التمام** ص 189
- **دائرة الوحدة** ص 195
- **الدالّة الدائرية** ص 195
- **الدالّة الدورية** ص 196
- **الدورة** ص 196
- **طول الدورة** ص 196
- **السعة** ص 202
- **التردد** ص 203
- **القيم الأساسية** ص 209
- **دالّة الجيب العكسية** ص 209
- **دالّة جيب التمام العكسية** ص 209
- **دالّة الظلّ العكسية** ص 209
- **المعادلة المثلّثية** ص 211

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كلّ جملة فيما يأتي:

1) ______ يُستعمل لحلِّ مثلَّث بمعلومية قياسي زاويتين وطول ضلع فيه.

2) الدوالّ $\cot\theta, \csc\theta, \sec\theta$ تسمى ______

3) تُسمى المسافة الأفقية في الدورة ______ .

4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن هذه الزاوية تُسمى ______ .

5) ______ هي الزاوية المحصورة بين خطِّ النظر والخطِّ الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.

6) ______ منحنى دالّة الجيب أو منحنى دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

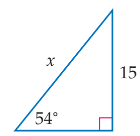
الفصل 4

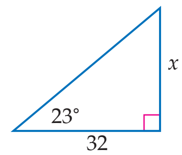
دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

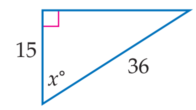
4-1 الدوالّ المثلّثية في المثلّثات القائمة الزاوية
ص 159–167

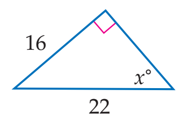
استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

7) 

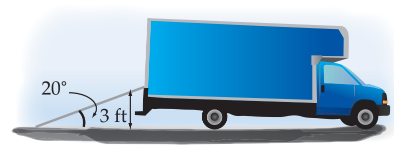
8) 

أوجد قيمة x مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

9) 

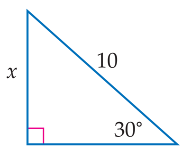
10) 

11) **شاحنة:** ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض 20°، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



مثال 1

استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x.



$\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ دالّة الجيب

$\sin 30° = \dfrac{x}{10}$ عوّض

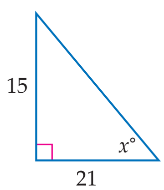
$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{10}$ $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{10}{2} = x$ اضرب الطرفين في 10

$5 = x$ بسّط

مثال 2

أوجد قيمة x، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan x° = \dfrac{15}{21}$ $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan^{-1}\dfrac{15}{21} = x$ معكوس الظلّ

$35.5° \approx x°$ استعمل الآلة الحاسبة

4-2 الزوايا وقياساتها
ص 168–173

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

12) $215°$ 13) $\dfrac{5\pi}{2}$

14) -3π 15) $-315°$

في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كلِّ زاوية من الزوايا المُعطاة:

16) $265°$ 17) $-65°$ 18) $\dfrac{7\pi}{2}$

19) **درّاجة هوائية:** إطار درّاجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in، فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان.

مثال 3

حوِّل القياس 160° إلى قياس بالرديان.

$160° = 160°\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$

$\dfrac{160\pi}{180}\text{ rad} = \dfrac{8\pi}{9}$

مثال 4

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية 150°.

زاوية بقياس موجب:

$150° + 360° = 510°$ أضف 360°

زاوية بقياس سالب:

$150° - 360° = -210°$ اطرح 360°

4-3 الدوالّ المثلَّثية للزوايا ص 174–179

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

20) $\cos 135°$ 21) $\tan 150°$

22) $\sin 2\pi$ 23) $\cos \frac{3\pi}{2}$

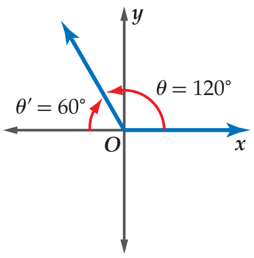
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية السِّتِّ للزاوية θ .

24) $(-4, 3)$ 25) $(5, 12)$ 26) $(16, -12)$

27) **كرة:** قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها $70°$، وبسرعة ابتدائية مقدارها 5m. المعادلة التي تُمثِّل المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0 (\cos \theta)\, t$، حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، وθ هي قياس الزاوية التي قذفت فيها الكرة، وt هو الزمن (بالثواني). ما المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور 10 ثوانٍ.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120°$.



بما أن ضلع الانتهاء للزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية المرجعية θ هو $180° - 120° = 60°$.

دالّة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن:

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(6, 5)$. فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية السِّتِّ للزاوية θ.

$$r = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{6} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{5}$$

4-4 قانون الجيوب ص 180–186

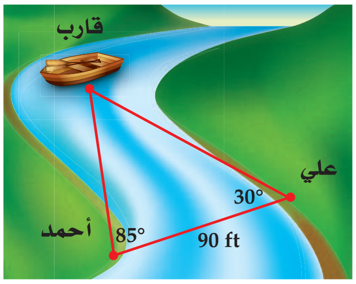
حدّد ما إذا كان للمثلَّث في كلٍّ ممّا يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

28) $C = 118°, c = 10, a = 4$

29) $A = 25°, a = 15, c = 18$

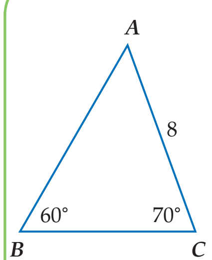
30) $A = 70°, a = 5, c = 16$

31) **قوارب:** يقف علي وأحمد على جانبَي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



مثال 7

حُلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



أولًا أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + A = 180°, A = 50°$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد قيمتَي a, c.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c} \qquad \frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$$

$$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°} \approx 8.7 \qquad a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°} \approx 7.1$$

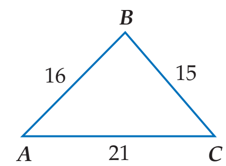
إذن $A = 50°, c \approx 8.7, a \approx 7.1$.

دليل الدراسة والمراجعة

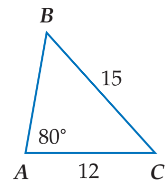
4-5 قانون جيوب التمام ص 194-189

حدِّد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيوب التمام) في حلِّ كلٍّ من المثلّثات الآتية، ثم حُلّ كلَّ مثلّث منها مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

32)



33)



34) $C = 75°, a = 5, b = 7$

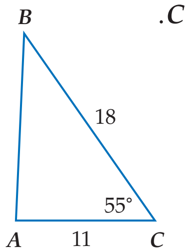
35) $A = 42°, a = 9, b = 13$

36) $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

37) **زراعة:** يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلّثة الشكل. طولا ضلعيها 120 ft, 325 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. فما طول السياج الذي يحتاج إليه؟

مثال 8

حُلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55°, b = 11, a = 18$.



أُعطي في السؤال طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلّث واستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11) \cos 55°$$
$$c^2 \approx 217.9$$
$$c \approx 14.8$$

ثم استعمل قانون جيوب التمام مرّة أخرى لإيجاد قياس الزاوية B.

$$11^2 = 18^2 + (14.8)^2 - 2(18)(14.8)\cos B$$
$$\frac{11^2 - 18^2 - (14.8)^2}{-2(18)(14.8)} = \cos B$$
$$0.7921 \approx \cos B$$
$$38° \approx B$$

قياس الزاوية الثالثة A

$$m\angle A \approx 180° - (55° + 38°) \approx 87°$$

إذن $A \approx 87°, B \approx 38°, c \approx 14.8$

4-6 الدوالّ الدائرية ص 201-195

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

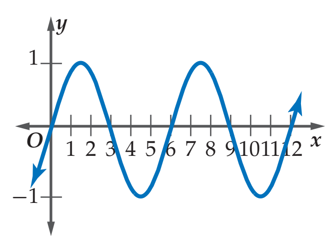
38) $\cos(-210°)$

39) $(\cos 45°)(\cos 210°)$

40) $\sin -\frac{7\pi}{4}$

41) $\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$

42) أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



43) **إطارات:** طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالّة التي تُمثّل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالّة في الزمن؟

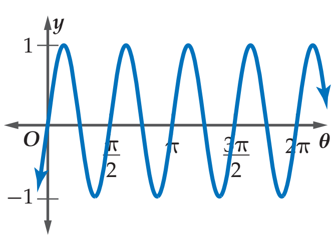
مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$
$$= \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالّة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه:



يبدأ النمط بالتكرار عند $\frac{\pi}{2}$، π، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$.

4-7 تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًا ص 202–208

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة للدوالّ الآتية، ثم مثّل كلًّا منها بيانيًا:

44) $y = 4 \sin 2\theta$

45) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

46) $y = 3 \csc \theta$

47) $y = 3 \sec \theta$

48) $y = \tan 2\theta$

49) $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

50) **رياضة:** قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره 10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالّة جيب تُمثّل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالّة في الزمن t.

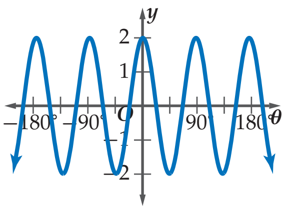
مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 2\cos 4\theta$. ثم مثّل هذه الدالّة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2| = 2$. لذلك فالتمثيل البياني للدالّة تكون له قيمة عظمى هي 2، وقيمة صغرى هي -2.

وطول الدورة:

$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$



4-8 الدوالّ المثلَّثية العكسية ص 209–214

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

51) $\text{Sin}^{-1}(1)$

52) $\text{Tan}^{-1}(0)$

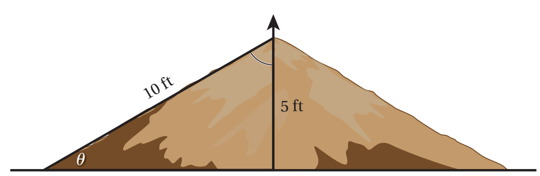
53) $\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

54) $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

55) $\text{Tan}^{-1} 1$

56) $\text{Cos}^{-1} 0$

57) **منحدرات:** منحدر ارتفاعه 5 أقدام، وطوله 10 أقدام كما يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالّة مثلَّثية عكسية، يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياس هذه الزاوية.



أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

58) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

59) $\sin\left(\text{Tan}^{-1} 0\right)$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك .

60) $\text{Tan}\ \theta = -1.43$

61) $\text{Sin}\ \theta = 0.8$

62) $\text{Cos}\ \theta = 0.41$

مثال 12

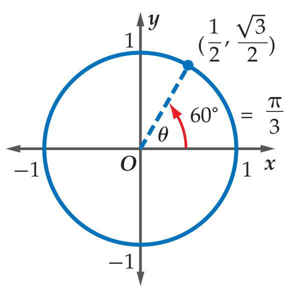
أوجد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$، بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$.

استعمل دائرة الوحدة.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة، بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما أن: $\text{Cos}\ \theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60°$

إذن $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}$.



مثال 13

أوجد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

[sin] [SHIFT] [tan] 1 [÷] 2 [=] 0.4472135955

إذن $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\ \theta = 0.72$، فأوجد θ.

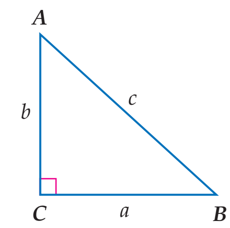
استعمل الآلة الحاسبة.

[SHIFT] [cos] 0.72 [=] 43.9455195623

إذن $\theta \approx 43.9°$.

اختبار الفصل

حُلّ $\triangle ABC$ في كلٍّ ممّا يأتي باستعمال القياسات الواردة، مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



1) $A = 36°, c = 9$

2) $a = 12, A = 58°$

3) $a = 9, c = 12$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

4) $325°$

5) $-175°$

6) $\frac{9\pi}{4}$

7) $-\frac{5\pi}{6}$

8) حدّد ما إذا كان للمثلّث ABC الذي فيه $A = 110°, a = 16, b = 21$ حل واحد أم حلان أم ليس له حل. ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقرّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

9) $\cos(-90°)$

10) $\sin 585°$

11) $\cot \frac{4\pi}{3}$

12) $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

13) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

14) $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$

15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلًّا من: $\cos\theta, \sin\theta$.

16) **اختيار من متعدد:** أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظلّ لها سالبين؟

A $65°$

B $310°$

C $120°$

D $265°$

أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين. ثم مثّل الدالّتين بيانيًّا:

17) $y = 2\sin 3\theta$

18) $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

19) **اختيار من متعدد:** طول دورة الدالّة $y = 3\cot\theta$ يساوي:

A $120°$

B $180°$

C $360°$

D $1080°$

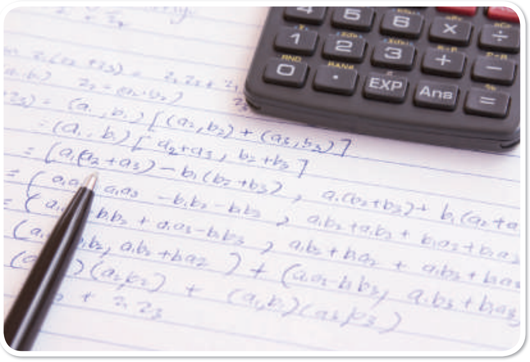
20) حدّد أنسب طريقة نبدأ بها لحلّ $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام)، الذي فيه: $y = 15, z = 9, X = 105°$، ثم حُلّ المثلّث مقرّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

21) **سواقٍ:** عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثّل الارتفاع عند الزمن 0. اكتب دالّة مثلّثية تُمثّل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالّة في الزمن t. ثم مثّل الدالّة بيانيًّا.

الفصل 4

الإعداد للاختبارات المعيارية

استعمال الآلة الحاسبة العلمية



تُعدّ الآلات الحاسبة العلمية والآلات الحاسبة البيانية من الأدوات المهمة والفاعلة في حلِّ المسائل. كما لاحظت سابقًا فإن بعض أسئلة الاختبارات تتضمن خطوات أو حسابات تحتاج فيها إلى استعمال الآلة الحاسبة العلمية.

استراتيجية استعمال الآلة الحاسبة العلمية

الخطوة 1

تَعرّف الدوالّ المختلفة في الآلة الحاسبة العلمية جيدًا ، ومتى تَستعمل كلًّا منها.

- **الصيغة العلمية :** للحسابات المتعلّقة بالأعداد الكبيرة.
- **الدوالّ الأُسِّية :** مسائل النموِّ والاضمحلال والربح المركب.
- **الدوالّ المثلَّثية :** مسائل تتضمن زوايا، ومسائل ترتبط بحلِّ المثلَّث، ومسائل في القياس غير المباشر.
- **الجذور التربيعية والنونية :** مسائل ترتبط بالبُعد في المستوى الإحداثي، ومسائل ترتبط بنظرية فيثاغورس.

الخطوة 2

استعمل الآلة الحاسبة العلمية لحلِّ المسائل.

- تذكّر أن تعمل بالصورة الأكثر فاعلية، فبعض الخطوات يمكن القيام بها ذهنيًّا أو يدويًّا، وفي بعضها الآخر يلزم استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- تحقّق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المُعطيات لحلِّها:

عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة، شكّل زاوية قياسها °57 مع قمة الشجرة. ما ارتفاع الشجرة مقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

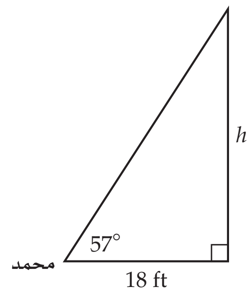
A 27.7 ft

B 28.5 ft

C 29.2 ft

D 30.1 ft

اقرأ المسألة بعناية. أُعطيت بعض القياسات، وطلب إليك إيجاد ارتفاع الشجرة. إذن من المفيد في البداية أن ترسم مخطّطًا يُمثّل المسألة.



استعمل دالّة مثلّثية لكتابة علاقة تربط الطولين بقياس الزاوية في المثلّث القائم الزاوية.

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$ دالّة الظل

$$\tan 57° = \frac{h}{18}$$ عوّض

لإيجاد ارتفاع الشجرة h تحتاج إلى إيجاد قيمة tan 57°. استعمل الآلة الحاسبة العلمية.

$$1.53986 \approx \frac{h}{18}$$ استعمل الآلة الحاسبة

$$27.71748 \approx h$$ اضرب الطرفين في 18

يبلغ ارتفاع الشجرة 27.7 ft تقريبًا؛ إذن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ كلّ مسألة وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل مُعطيات المسألة لحلها:

1) تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسيًّا. ما زاوية ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟

A 15.6° **B** 18.4°

C 19.6° **D** 22.3°

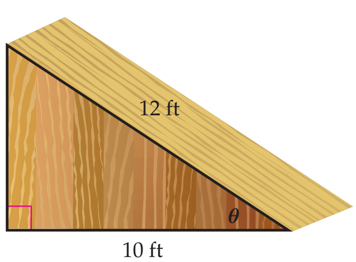
2) ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثّله الشكل أدناه؟

F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

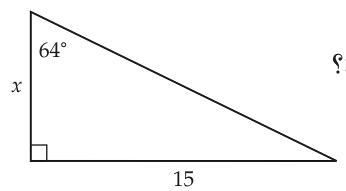


اختبار تراكمي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) ما قيمة x في الشكل المجاور، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالّة: $y = 3\cos 4\theta$ ؟

A $90°$

B $180°$

C $270°$

D $360°$

3) تتكون مجموعة حلّ المعادلة $\sqrt{8x+1} - 4 = 1 - 2x$ من:

A عددين صحيحين موجبين.

B عدد صحيح موجب واحد فقط.

C عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب.

D ليس لها حلول حقيقية.

4) ما القيمة الدقيقة لِـ $\sin 240°$؟ C

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) المقدار $i^{53} + i^{51} + i^{50}$ يساوي :

A i

B $-i$

C -1

D 0

6) ما قيمة m في المثلّث MNO الذي فيه: $n = 12.4 \text{ cm}, M = 35°, N = 74°$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

7) أوجد قيمة المحددة : $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

A -144

B -72

C 72

D 144

8) إذا كان $(x+1)$ عاملًا لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$، فإن قيمة K تساوي:

A 6

B $\frac{1}{3}$

C -3

D 3

9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

A -11

B 1

C -1

D 11

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ ممّا يأتي:

10) تعتمد سرعة موجة المدِّ (تسونامي) v على معدّل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تُمثّل سرعة المد عندما يكون معدّل عمق الماء d كيلومترًا، $v = 356\sqrt{d}$، وإذا علمت أن موجة المدّ (تسونامي) تسير بسرعة $145\,km/h$، فما معدَّل عمق الماء، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة؟

11) أوجد معكوس $g(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$.

12) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كلَّ يوم كي يكون في صحة جيدة.

a) اكتب صيغة تمثّل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصانًا مدة d يومًا.

b) هل الصيغة التي وضعتها تُمثّل تغيّرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًّا؟ فسّر إجابتك.

c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟

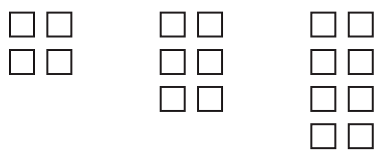
13) إذا كان $g(x) = \sqrt{x-1}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$، فأوجد قيمة $(f \circ g)\left(\frac{11}{2}\right)$.

14) إذا كان $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$، حيث

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من $\underline{C}$) .

15) يتكرّر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟



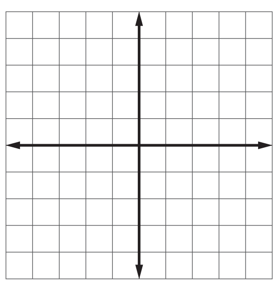
الخطوة 3 الخطوة 2 الخطوة 1

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ ممّا يأتي موضِّحًا خطوات الحلِّ:

16) إذا كان $f(x) = -|x+4| + 3$، فأجب عمّا يأتي

a) مثّل الدالّة $f(x)$ بيانيًّا .



b) حدِّد مجال الدالّة ومداها.

c) أوجد المقاطع للمحاور x، y .

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فعد إلى الدرس ...	4-1	4-7	مهارة سابقة	4-3	مهارة سابقة	4-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	1-5	مهارة سابقة	مهارة سابقة	2-2	مهارة سابقة

الصيغ

الهندسة الإحداثية في المستوى

الميل	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$
المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,
نقطة المنتصف	$M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$,

المصفوفات

الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$
محدِّدة الرتبة الثانية	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - e & b - f \\ c - g & d - h \end{bmatrix}$
محدِّدة الرتبة الثالثة) قاعدة الأقطار(	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$
الضرب في ثابت	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
مساحة مثلث رؤوسه $(a,b),(c,d),(e,f)$ تساوي نصف القيمة المطلقة للمقدار	$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

كثيرات الحدود

مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
القانون العام	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
مكعب المجموع	$(a + b)^3 = a^3\ b + 3b^2a + 3ab^2 + b^3$
مربع الفرق	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
مكعب الفرق	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

الإحصاء والاحتمال

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P\ (A \cap B)}{P(A)},\ P(A) \neq 0$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$n! = n\ (n - 1)\ .\ (n - 2)\ ...\ 2\ .\ 1$$

$$0! = 1$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

المتتابعات والمتسلسلات

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
الحدّ النوني في المتتابعة الجبرية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
مجموع حدود المتسلسلة الهندسية المنتهية	$S_n = \dfrac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ or $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع حدود المتسلسلة الجبرية المنتهية	$S_n = n\left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)$ or $S_n = \dfrac{n}{2}\,[2a_1 + (n - 1)d]$
مجموع حدود المتسلسلة الهندسة غير المنتهية	$S = \dfrac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$

الصيغ

حساب المثلثات

قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$$

قانون جيوب التمام

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

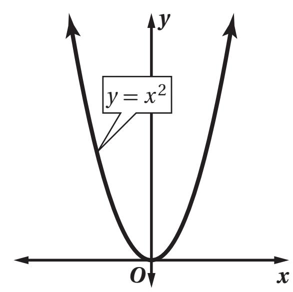
الدوالّ المثلّثية

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

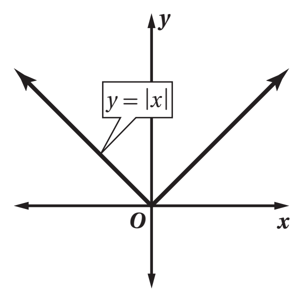
$$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \qquad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\sin \theta}$$

الدوالّ الرئيسة (الأم)

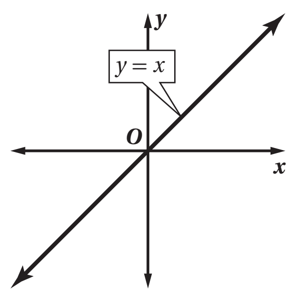
الدوالّ التربيعية



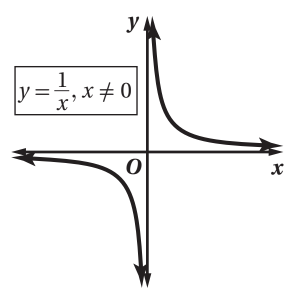
دوالّ القيمة المطلقة



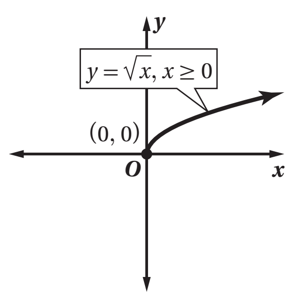
الدوالّ الخطية



المقلوب والدوالّ النسبية

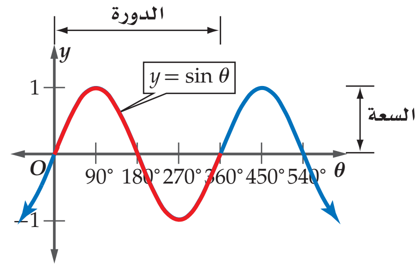


دوالّ الجذر التربيعي

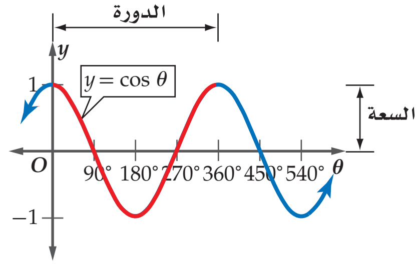


الدوالّ الرئيسة (الأم)

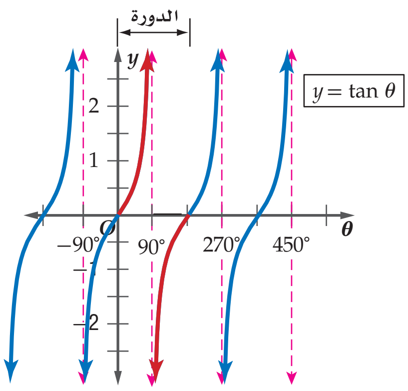
$y = \sin \theta$



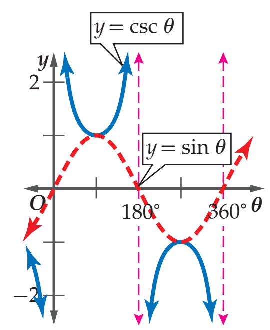
$y = \cos \theta$



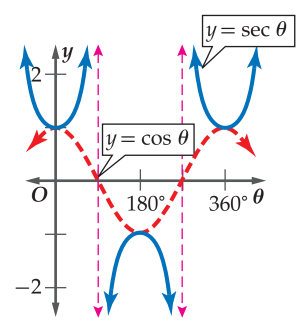
$y = \tan \theta$



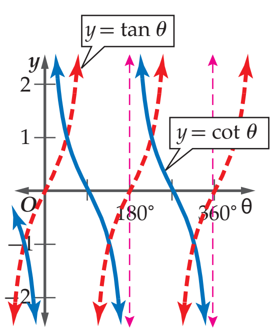
$y = \csc \theta$



$y = \sec \theta$



$y = \cot \theta$



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
مصفوفة الوحدة	I
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
الحدث المتمّم	A'
احتمال الحدث A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B\mid A)$
عدد تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
عدد توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالّة الجيب	$Sinx$
دالّة جيب التمام	$Cosx$
دالّة الظل	$Tanx$
دالّة مقلوب الظل	$\mathrm{Cot}x$
دالّة مقلوب الجيب	$\mathrm{Csc}x$
دالّة مقلوب جيب التمام	$\mathrm{Sec}x$
معكوس دالّة Sin	$\mathrm{Sin}^{-1}x$
معكوس دالّة Cos	$\mathrm{Cos}^{-1}x$
معكوس دالّة Tan	$\mathrm{Tan}^{-1}x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالّة f بمتغير x	$f(x)$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالّة المتعددة التعريف	$f(x)=\{$
دالّة القيمة المطلقة	$f(x)=\lvert x\rvert$
دالّة أكبر عدد صحيح	$f(x)=[\![x]\!]$
دالّة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	$\boldsymbol{i}$
تركيب الدالّتين f وَ g	$[f\circ g](x)$
معكوس الدالّة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m\times n$	$\mathrm{A}_{m\times n}$
العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة A	a_{ij}
محدّدة المصفوفة A	$\lvert \mathrm{A}\rvert$